



Estabilidad en Control Predictivo

Prof. Cesar de Prada

Dpt. Ingeniería de Sistemas y Automática

Facultad de Ciencias

Universidad de Valladolid



Control Predictivo

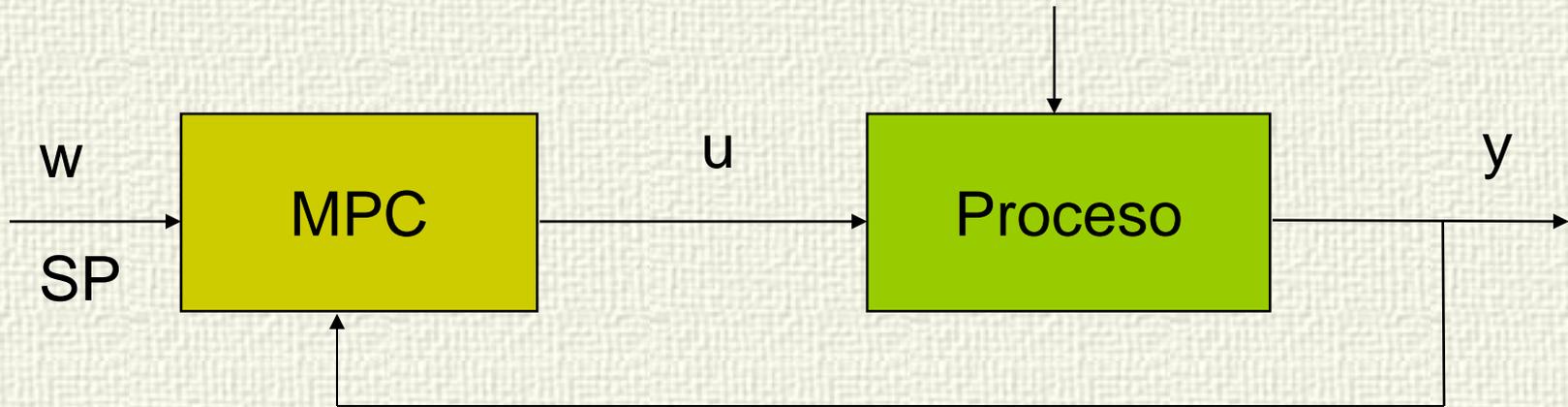


$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

En cada periodo de muestreo se resuelve un problema de optimización en lazo abierto considerando que las variables de decisión $\Delta u(t)$, $\Delta u(t+1)$, ..., $\Delta u(t+Nu-1)$ son independientes, y se aplica según una política de horizonte móvil



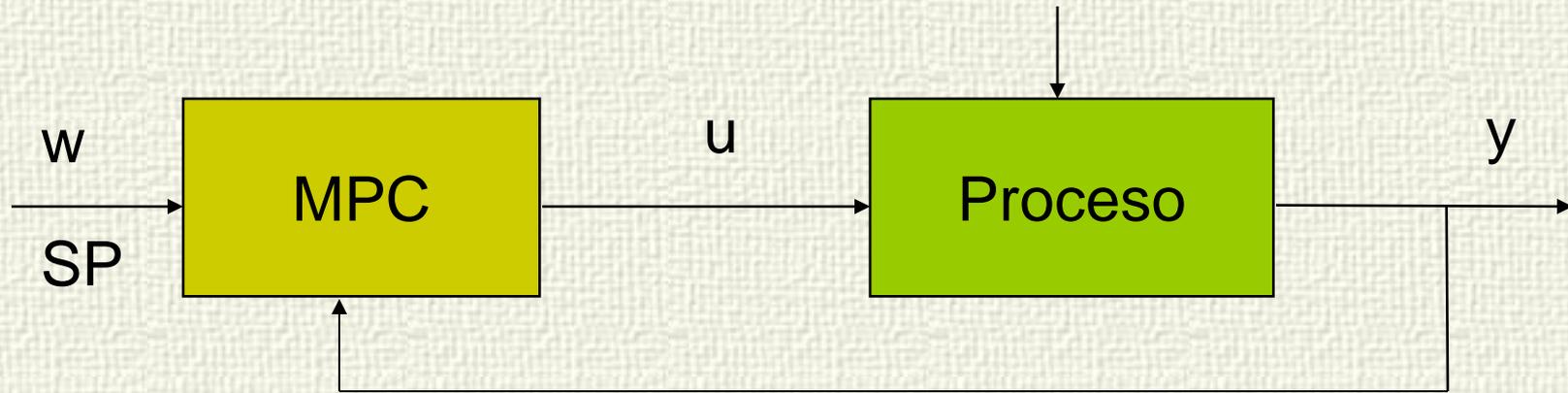
Lazo cerrado



El funcionamiento de los controladores predictivos, aun siendo bueno en general, depende del modelo dinámico utilizado para representar el proceso y de la sintonía del controlador.



Estabilidad / Robustez



Garantía de Estabilidad: ¿Como podemos asegurar que el sistema es estable en lazo cerrado independientemente de la sintonía? (para modelo perfecto)

Robustez: ¿Como podemos asegurar un funcionamiento estable en lazo cerrado a pesar de los errores del modelo o posibles perturbaciones?



Sistemas lineales sin restricciones

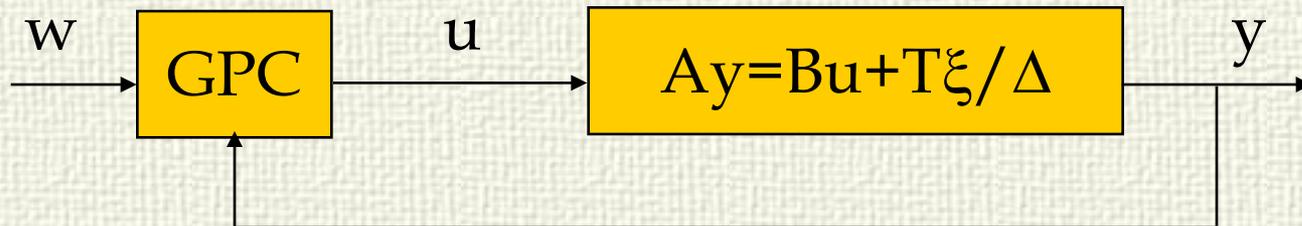


✓ Ejemplo GPC

¿ Como puede asegurarse que el control obtenido mediante optimización en lazo abierto en cada paso

$$\Delta \mathbf{u}(t) = [\mathbf{G}'\mathbf{G} + \beta \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{G}'(\mathbf{w} - \mathbf{p}_j)$$

estabiliza el sistema en lazo cerrado resultante ?

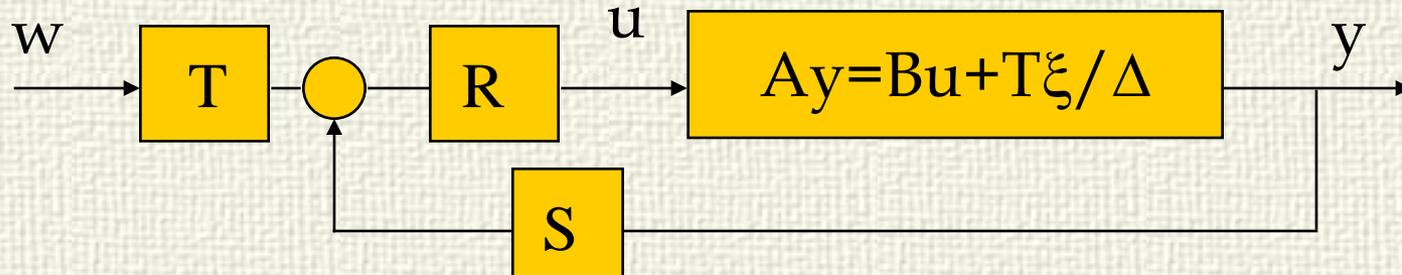




Análisis de estabilidad sin restricciones



El controlador GPC es equivalente a un regulador lineal y puede realizarse el análisis por métodos clásicos.



La estabilidad depende de los parámetros de sintonía $N_2, N_1, N_u, \beta, \alpha, \dots$ Puede incorporarse análisis de robustez. (Serrano, Prada, 1994)



Estabilidad en lazo cerrado

- ✓ Reguladores basados en modelos respuesta salto o impulso, (DMC, IDCOM,..) solo son aplicables a sistemas estables en lazo abierto.
- ✓ No hay teoremas que garanticen la estabilidad independientemente de la sintonía con otros reguladores clásicos basados en F.T : (GPC,..) o variables de estado (PFC,..), excepto en casos particulares.



MBPC en espacio de estados

Para el sistema $x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)$, en cada instante t , calcular los controles $v(0), \dots, v(N-1)$ que minimicen

$$J_N(x(t)) = \min_v \left[z(N)' Q z(N) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)' Q z(j) + v(j)' R v(j) \right]$$

sujeto a

$$z(j+1) = Az(j) + Bv(j) \quad , \quad z(0) = x(t) \quad \text{modelo}$$

y aplicando $u(t)=v^*(0,x(t))$ llevar el sistema al origen, partiendo de x_0

Q, R, P matrices positivas definidas



MBPC en espacio de estados

Para (A, B) estabilizable, la solución es única, y en cada t viene dada por

$v(j) = K_{N-j}z(j)$ con K_{N-j} obtenidas de ecuaciones de Riccati

luego $u(t) = v^*(0, x(t)) = K_N x(t)$ y

$$x(t+1) = Ax(t) + B K_N x(t) = (A + B K_N)x(t)$$

la estabilidad no está garantizada y depende de los autovalores de $A + B K_N$

Sintonía con Q, R, N



Marco de referencia

- ✓ Modelos:
 - Lineales (F.T. , Var. de estado)
 - Lineales con incertidumbre
 - No lineales
- ✓ Restricciones (si / no)
- ✓ Temas relacionados:
 - Factibilidad
 - Robustez



Solución: Imposición de condiciones adicionales para garantizar estabilidad

- ✓ Restricciones terminales
- ✓ Horizontes infinitos
- ✓ Penalización terminal
- ✓ Restricción de contracción
- ✓ Parametrización de soluciones estables



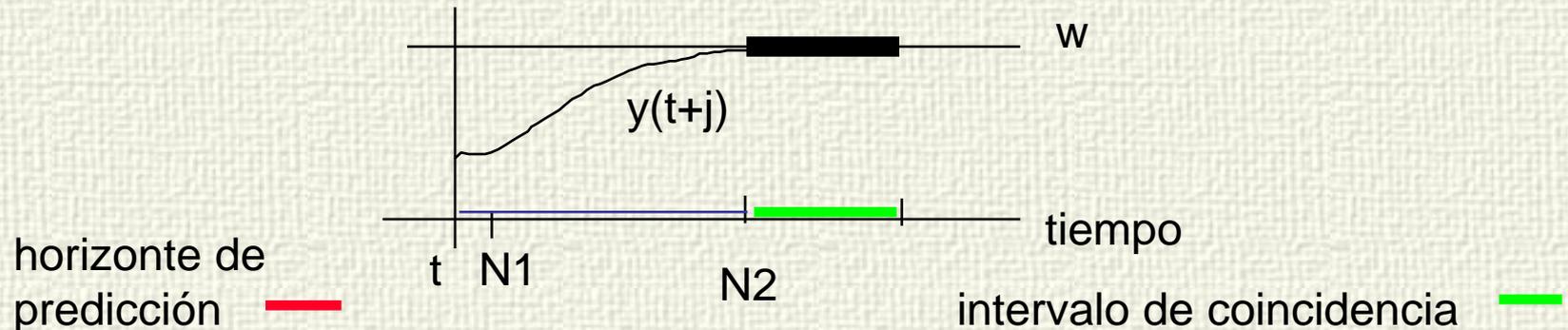
Restricciones terminales

❖ Restricciones de igualdad tras $N2$:

- ◆ CRHPC Constrained Receding Horizon Predictive Control (Clarke and Scattolini 1991)
- ◆ SIORHC Stabilizing I/O Receding Horizon Control (Mosca et al. 1990)

$$y(t+j) = w \quad j=N2, \dots, N2+M$$

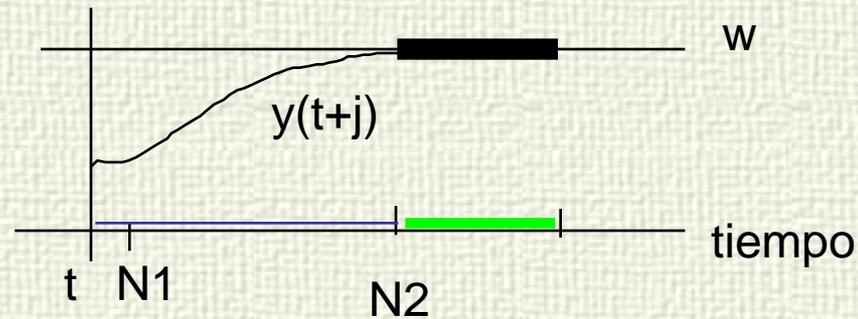
Se fuerza una solución estable al final del horizonte durante M periodos $>$ orden del sistema





Restricciones terminales

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$



Si la salida y la entrada son constantes durante un número superior a n periodos de muestreo, los valores posteriores de $y(t)$ también serán constantes.

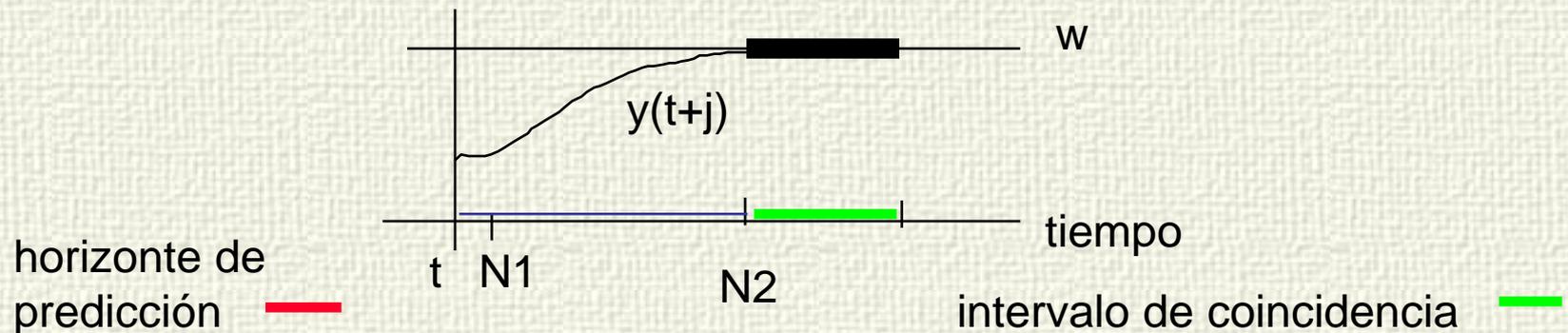


Restricciones terminales

$$\min_{\Delta u} J = \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} [\beta \Delta u(t+j)]^2$$

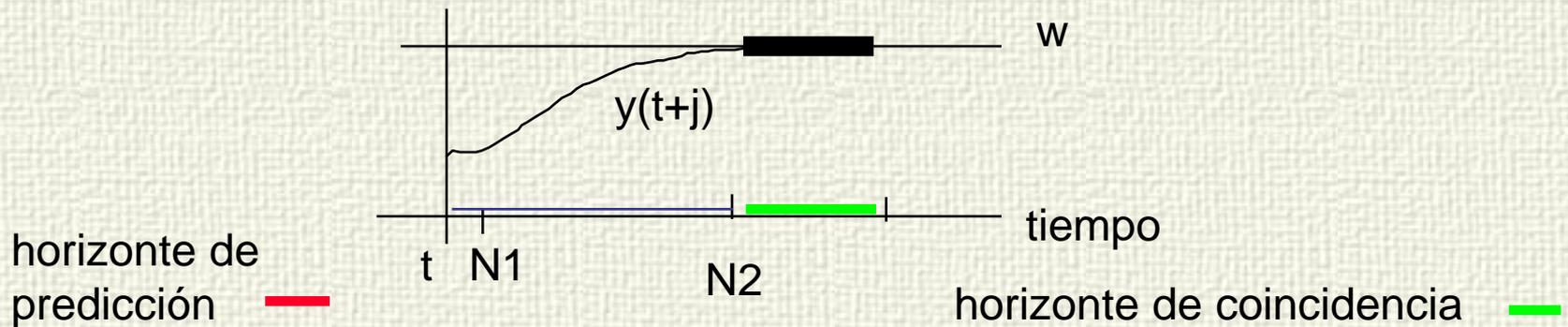
$$\begin{aligned} y(t+j) &= G_j(q^{-1})\Delta u(t+j) + p_j & j &= 1, \dots, N2+M \\ y(t+j) &= w & j &= N2, \dots, N2+M \end{aligned}$$

Solución analítica con
multiplicadores de Lagrange





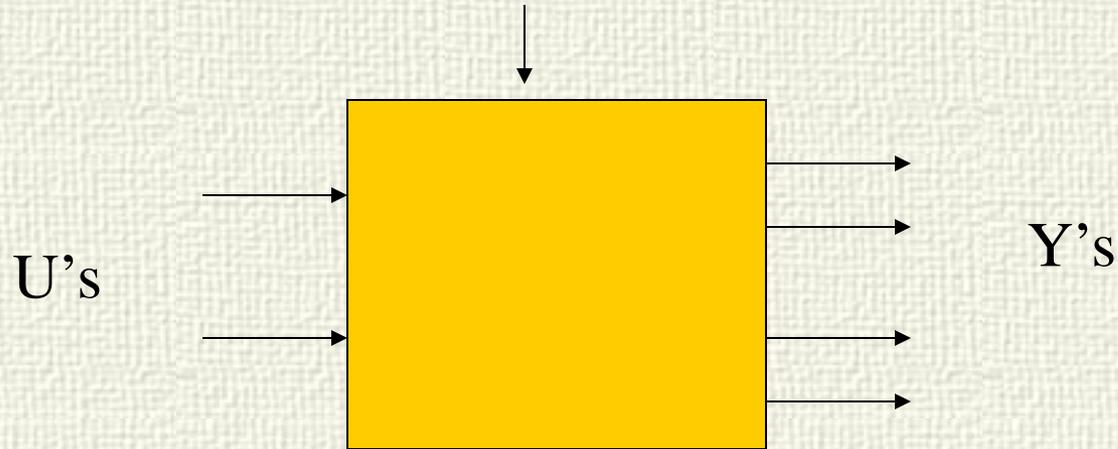
Restricciones terminales



- ✓ El requisito de que la salida sea igual a la referencia durante un número finito de periodos de muestreo, impone un condición fuerte que conduce a soluciones subóptimas sobre las que podrían obtenerse sin esa restricción
- ✓ Si se usa en un contexto con restricciones puede crear además situaciones de no-factibilidad



¿Referencias Alcanzables?



La mayor parte de los procesos tienen más variables controladas que manipuladas

Por ello, a menudo no es posible alcanzar todas las consignas simultáneamente



Garantía de estabilidad

Horizonte Infinito, Kalman LQG 1960

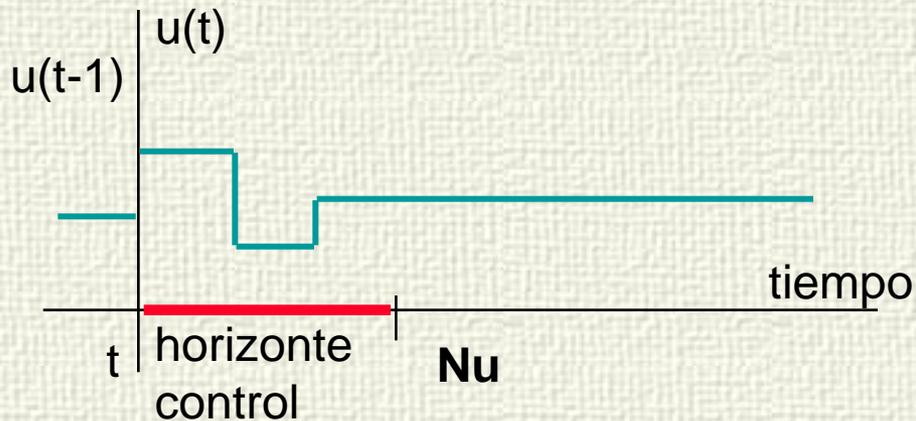
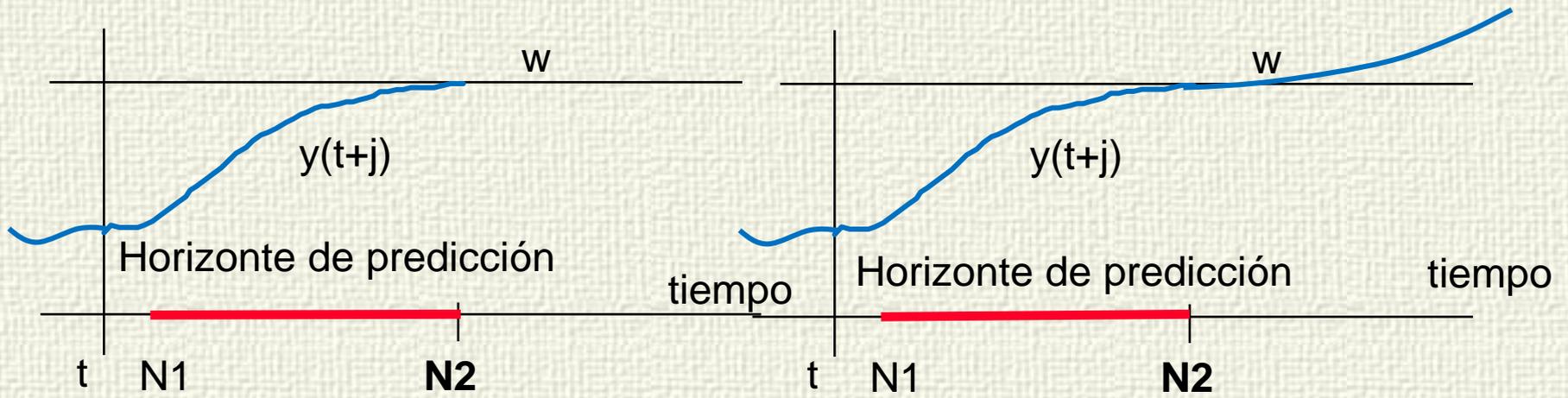
$$J_{\infty}(\mathbf{x}(t)) = \min_{\mathbf{v}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{z}(j)' \mathbf{Q} \mathbf{z}(j) + \mathbf{v}(j)' \mathbf{R} \mathbf{v}(j) \right]$$

El lazo cerrado es estable y la solución es del tipo $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t)$ con \mathbf{K} dada por la ecuación de Riccati

¿Por qué con un horizonte finito no hay garantía de estabilidad, aún con modelo perfecto y sin perturbaciones, si en cada paso se toma una decisión óptima?



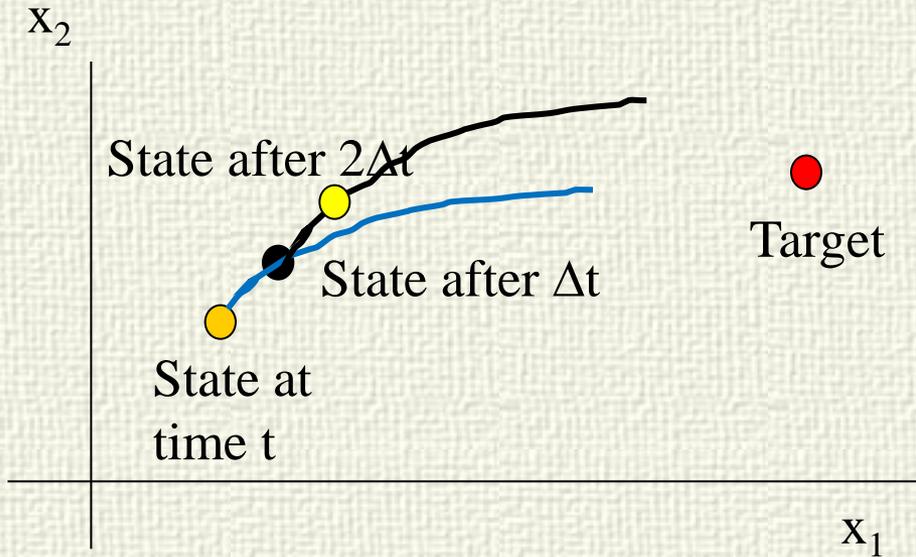
Estabilidad



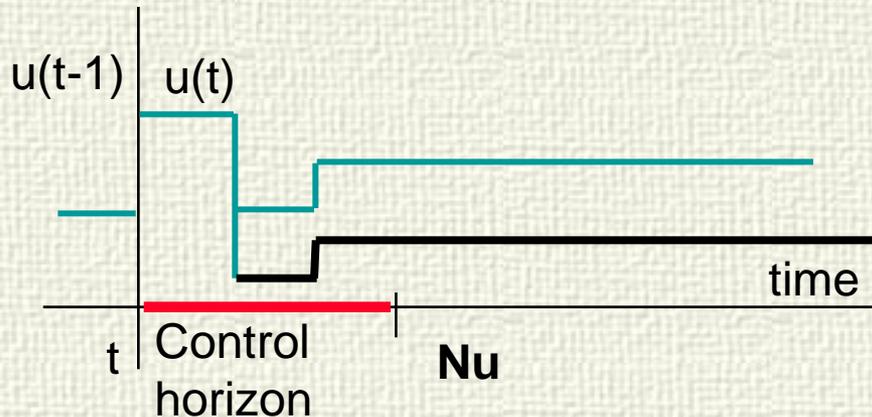
Con horizonte finito $N2$, no hay garantía de que, incluso con un modelo perfecto, la aplicación de las señales de control “óptimas” $u(t)$ del MPC conduzca a un lazo de control estable en lazo cerrado



Estabilidad

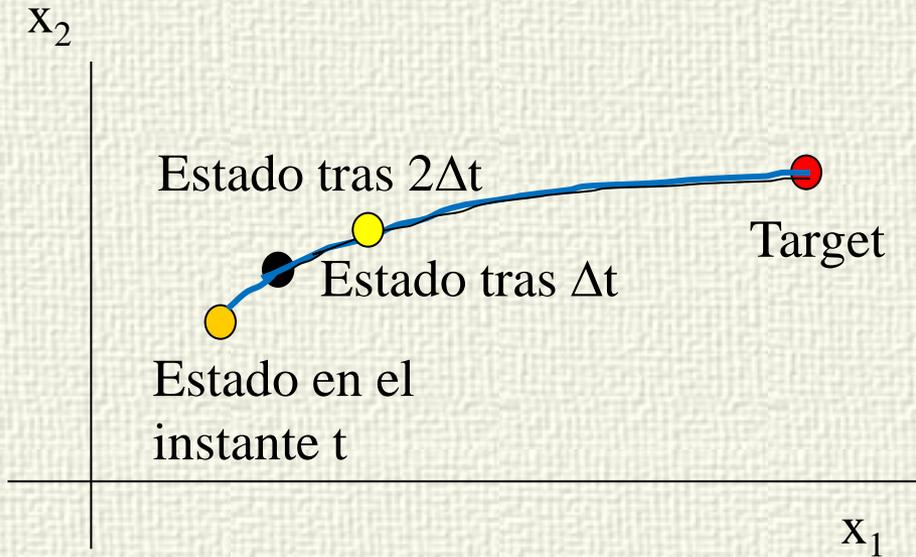


El punto clave para entender por qué, con horizonte finito, el lazo cerrado puede ser inestable incluso si no hay perturbaciones y el modelo es perfecto, es el hecho de que, si la trayectoria no alcanza el objetivo dentro del horizonte de predicción, la solución del problema de optimización en lazo abierto comenzando en t con N pasos futuros puede ser diferente de la solución empezando en $t + \Delta t$ con N pasos futuros. Por tanto, el estado del proceso en $t + 2\Delta t$ no tiene por qué estar en la trayectoria original, etc.

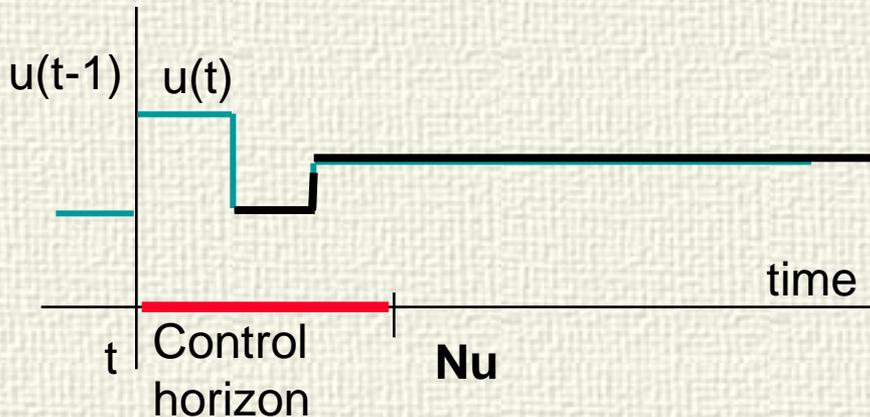




Horizonte infinito

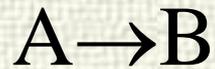


Si el objetivo se alcanza dentro del horizonte de predicción, lo que ocurre con horizonte infinito, se puede aplicar el principio de optimalidad de Bellman para concluir que, como cualquier parte de una trayectoria óptima también es óptima, las trayectorias que comienzan en t y en $t + \Delta t$ deben coincidir. Por tanto, si la primera trayectoria en lazo abierto es estable, la trayectoria en lazo cerrado también es estable.

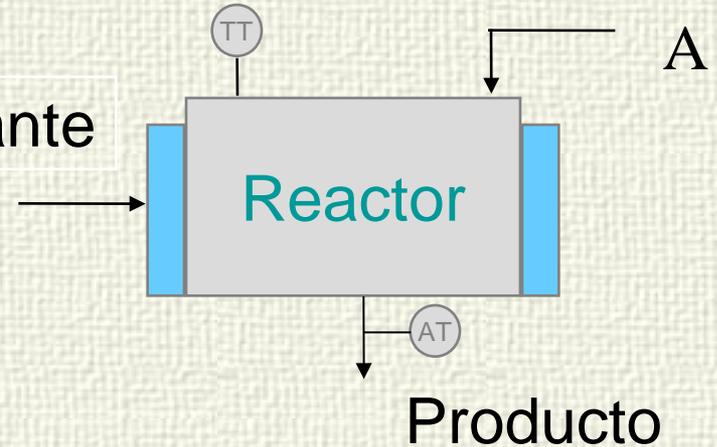




Ejemplo: Reactor Químico



Refrigerante



$$V \frac{dc_A}{dt} = Fc_{Ai} - Fc_A - Vke^{-E/RT}c_A$$

$$c_A = (1-x)c_{Ai}$$

$$V\rho c_e \frac{dT}{dt} = F\rho c_e T_i - F\rho c_e T + Vke^{-E/RT}c_A \Delta H - UA(T - T_r)$$

$$V_r \rho_r c_{er} \frac{dT_r}{dt} = F_r \rho_r c_{er} T_{ri} - F_r \rho_r c_{er} T_r + UA(T - T_r)$$

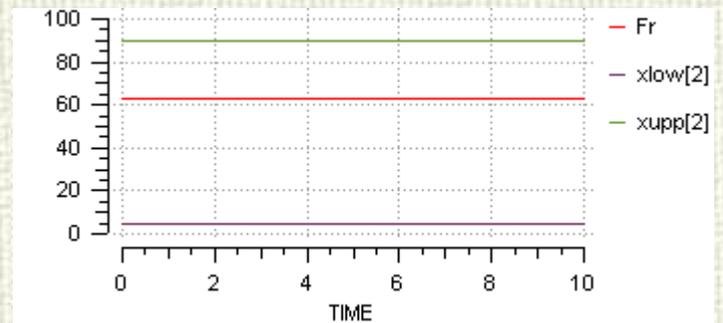
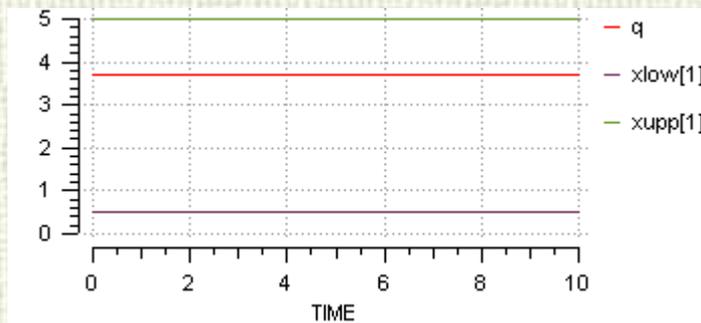
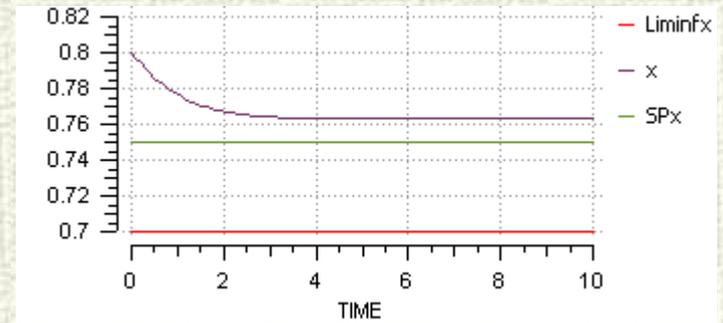
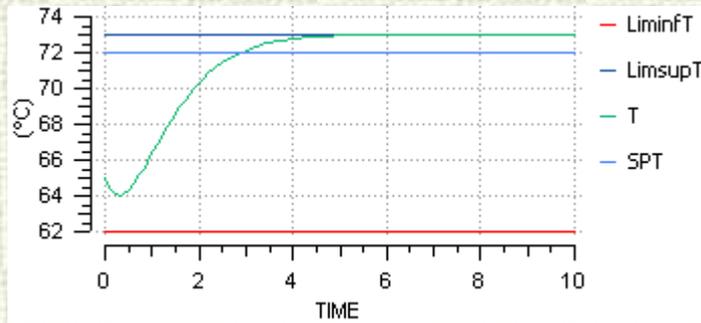


Reactor Químico

Horizonte de predicción: 10

$$Fr = 62.679$$

$$q = 3.720$$



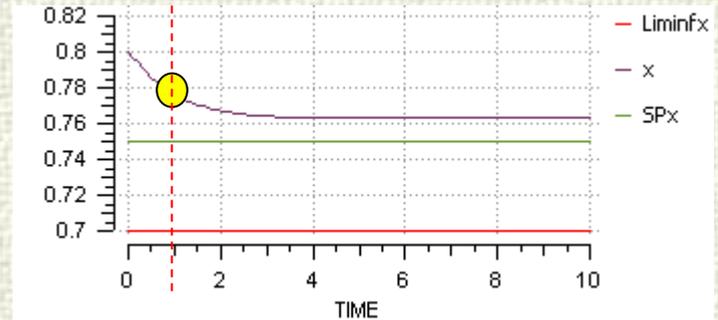
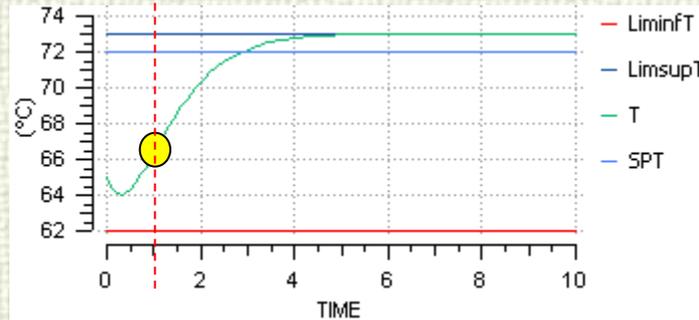
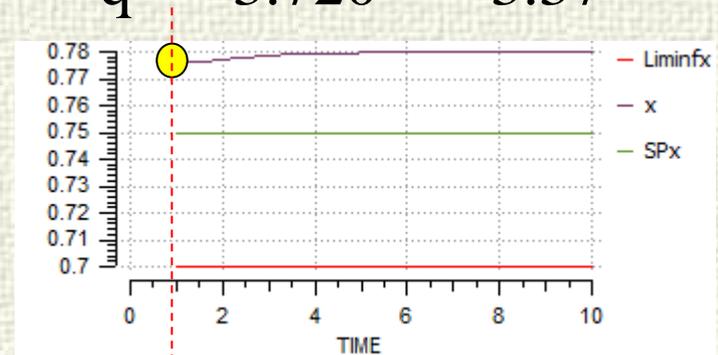
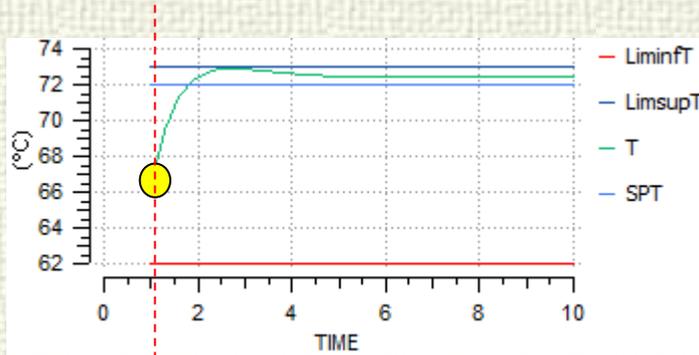
MPC primera iteración, predicciones



Reactor Químico, 2ª iteración

Horizonte de predicción: 10

$$\begin{aligned} Fr &= 62.679 & 57.17 \\ q &= 3.720 & 3.37 \end{aligned}$$



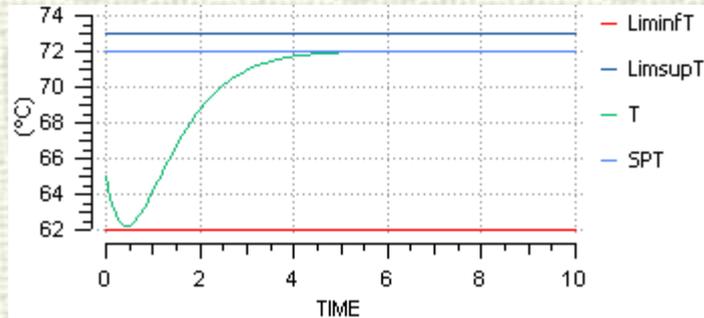
1st iteración



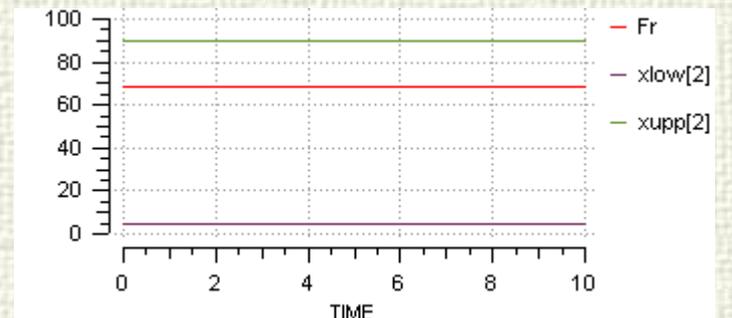
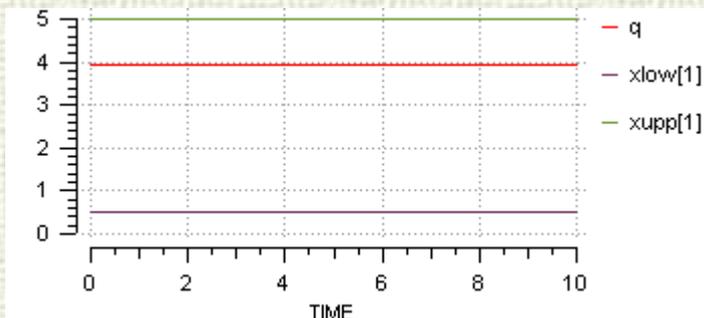
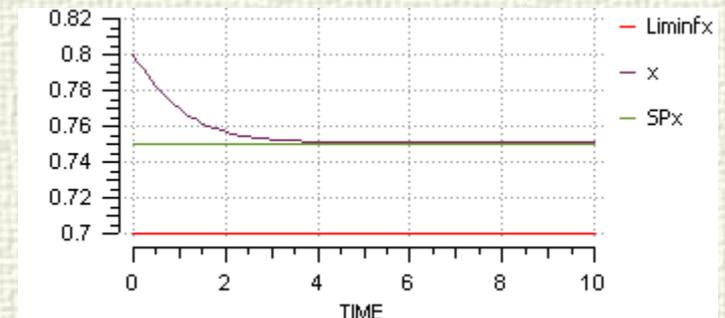
Reactor químico, horizonte infinito



Partiendo de los mismos valores, la solución depende del horizonte de predicción

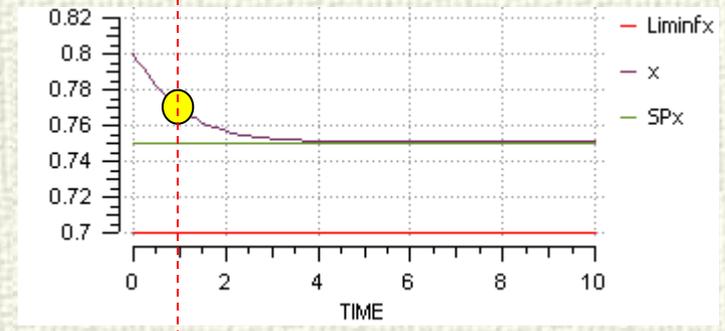
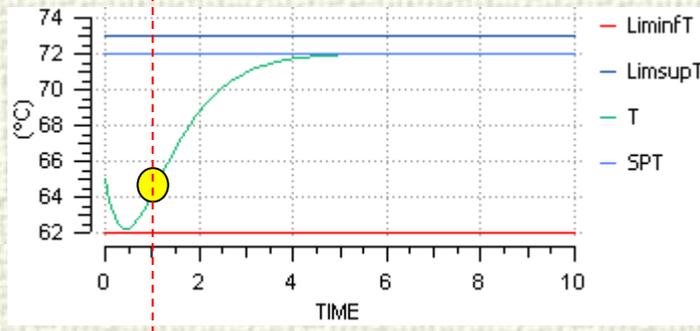
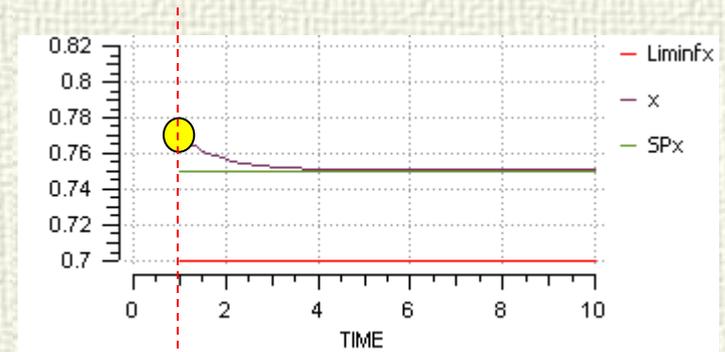
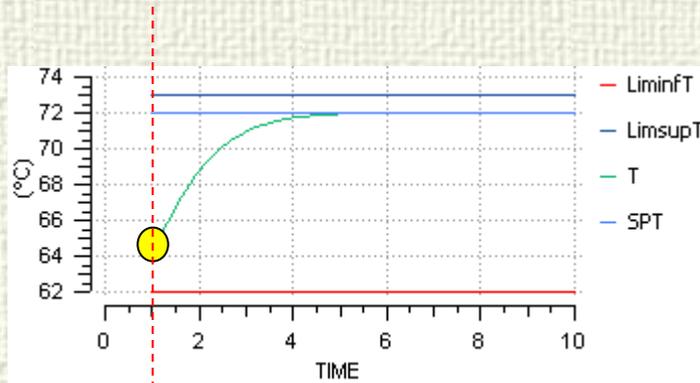


Horizonte de Predicción 2000





Usando un horizonte largo, las MV calculadas y las trayectorias que empiezan en $t = 1$ coinciden con las anteriores





Estabilidad en MBPC con restricciones



- ✓ Al incluir restricciones desaparecen las soluciones analíticas (GPC, Matriz de Kalman,...)
- ✓ El sistema con restricciones es no-lineal, incluso si el modelo es lineal, y el análisis de estabilidad es mas difícil
- ✓ Es difícil obtener soluciones realizables con horizontes infinitos

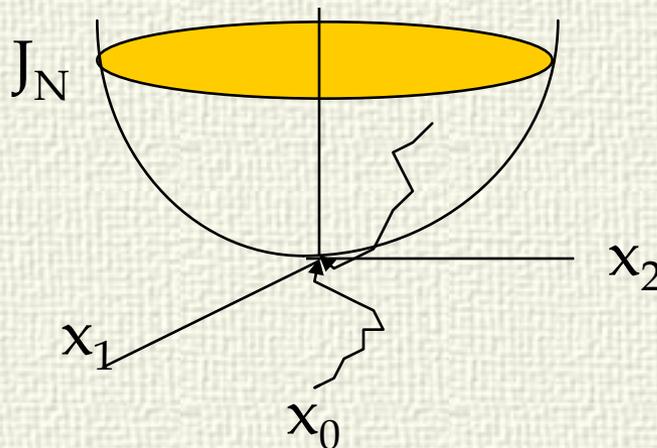


Uso de J_N como función de Lyapunov



Como J_N es definida positiva y $J_N(0)=0$, puede ser usada como función de Lyapunov para el estudio de estabilidad. Para que el sistema sea estable en lazo cerrado debe cumplirse:

$$J_N(x(t)) > J_N(x(t+1))$$



a lo largo de las trayectorias del sistema



Funcion de Lyapunov

La función escogida es:

$$J_N(x(t)) = \min_v \left[z(N)' Q z(N) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)' Q z(j) + v(j)' R v(j) \right]$$

sujeto a

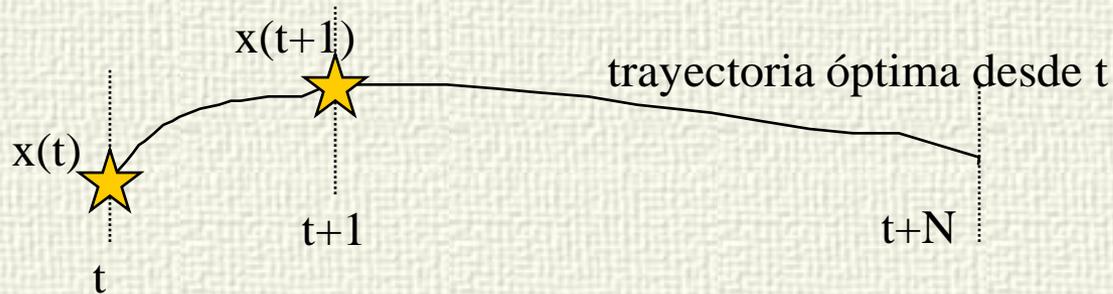
$$z(j+1) = Az(j) + Bv(j) \quad , \quad z(0) = x(t)$$

y debe calcularse a lo largo de las trayectorias impuestas por la solución de la optimización en cada paso:

$$u(t) = v^*(0, x(t)) \quad x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$



Ecuación básica



Del principio de optimalidad, y restando $J_N(x(t+1))$:

$$J_N(x(t)) - J_N(x(t+1)) =$$

$$x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t) + J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1))$$

Esta expresión debe ser positiva para asegurar la estabilidad

El término $x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)$ es positivo

El término $J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1))$ es de signo indeterminado



Enfoques de garantía de estabilidad



- ✓ Restricciones en el estado
 - $z(N)=0$ (Kwon and Pearson, 1977)
- ✓ Penalización terminal
 - $x(N)'Px(N)$ P grande
- ✓ Horizonte infinito
 - (Rawlings and Muske, 1993)



Restricción terminal $z(N)=0$

$$J_N(x(t+1)) = \min_v \left[z(N)'Qz(N) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)'Qz(j) + v(j)'Rv(j) \right]$$

si $z(N) = 0$

$$= \min_v \left[z(N-1)'Qz(N-1) + v(N-1)'Rv(N-1) + \sum_{j=0}^{N-2} z(j)'Qz(j) + v(j)'Rv(j) \right] = J_{N-1}(x(t+1))$$

pues $v(n-1)$ no influye en $z(n-1)$ ni en $z(N-i)$ y la minimización debe dar por tanto $v(N-1)=0$

De este modo $J_N(x(t)) > J_N(x(t+1))$ y el sistema es asintóticamente estable



Penalización terminal

La función escogida es en este caso:

$$J_N(x(t)) = \min_v \left[z(N)' P z(N) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)' Q z(j) + v(j)' R v(j) \right]$$

con P suficientemente grande.

- ❁ Esto equivale a forzar soluciones en las que $z(N) \rightarrow 0$, con lo cual, $J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1)) \rightarrow 0$ y el sistema es asintóticamente estable
- ❖ No impone la restricción fuerte $z(N)=0$, pero no da pautas para calcular P



Horizonte Infinito

- ✓ Si $N \rightarrow \infty$, $\Rightarrow J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1)) \rightarrow 0$
el término $x(t)'Qx(t) + u(t)'Ru(t)$ domina sobre
 $J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1))$ con lo que

$$J_N(x(t)) - J_N(x(t+1)) =$$
$$x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t) + J_{N-1}(x(t+1)) - J_N(x(t+1))$$

es positivo y el sistema asintóticamente estable

¿Como resolver el problema de horizonte infinito con restricciones? (tiene infinitas restricciones...)



Rawlings and Muske 1993

- ✓ Modelo lineal en espacio de estados
- ✓ Horizonte de predicción infinito
- ✓ Horizonte de control finito
- ✓ Realizable mediante parametrización de la entrada, por ejemplo:

$$[v_0, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, 0, 0, \dots]$$

$$[v_0, v_1, v_2, \dots, v_{N-1}, Kz_N, Kz_{N+1}, \dots]$$

y uso de un funcional de costo equivalente con penalización terminal



Muske and Rawlings 1993

$$z(j+1) = Az(j) + Bv(j)$$

$$J(x(t)) = \min_v \left[\sum_{j=0}^{\infty} z(j)' Q z(j) + \sum_{j=0}^{N-1} v(j)' R v(j) \right] =$$
$$= \min_v \left[\sum_{j=N}^{\infty} z(j)' Q z(j) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)' Q z(j) + \sum_{j=0}^{N-1} v(j)' R v(j) \right] =$$

como $v(j) = 0$ para $j \geq N$, se tiene $z(N+j) = A^j z(N)$ y

$$\sum_{j=N}^{\infty} z(j)' Q z(j) = \sum_{j=0}^{\infty} (A^j z(N))' Q A^j z(N) = z(N)' \left(\sum_{j=0}^{\infty} A^j' Q A^j \right) z(N)$$

ahora definiendo $P = \sum_{j=0}^{\infty} A^j' Q A^j$

$$J(x(t)) = \min_v \left[z(N)' P z(N) + \sum_{j=0}^{N-1} z(j)' Q z(j) + v(j)' R v(j) \right]$$

se pueden imponer restricciones y resolver el problema con QP



Cálculo de P

Si A tiene autovalores estables A^j no diverge y:

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} A^j{}'QA^j = Q + A'QA + A^2{}'QA^2 + A^3{}'QA^3 + \dots$$

$$A'PA = A'QA + A^2{}'QA^2 + A^3{}'QA^3 + \dots$$

restando:

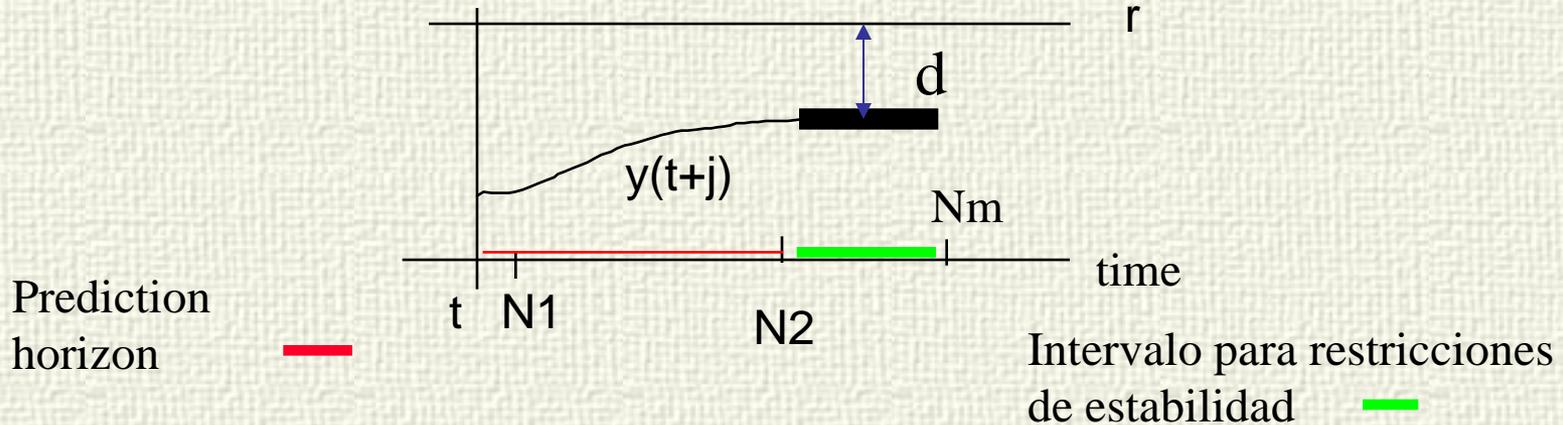
$$P - A'PA = Q \quad \text{ecuación matricial de Lyapunov} \quad (\text{dlyap})$$

Si A tiene autovalores inestables hay que imponer una restricción terminal para anular los modos inestables

Requiere que el origen sea factible para que $\sum_{j=N}^{\infty} z(j)'Qz(j)$ sea finito



Optimización de restricciones terminales (Cristea, Prada, 1998)



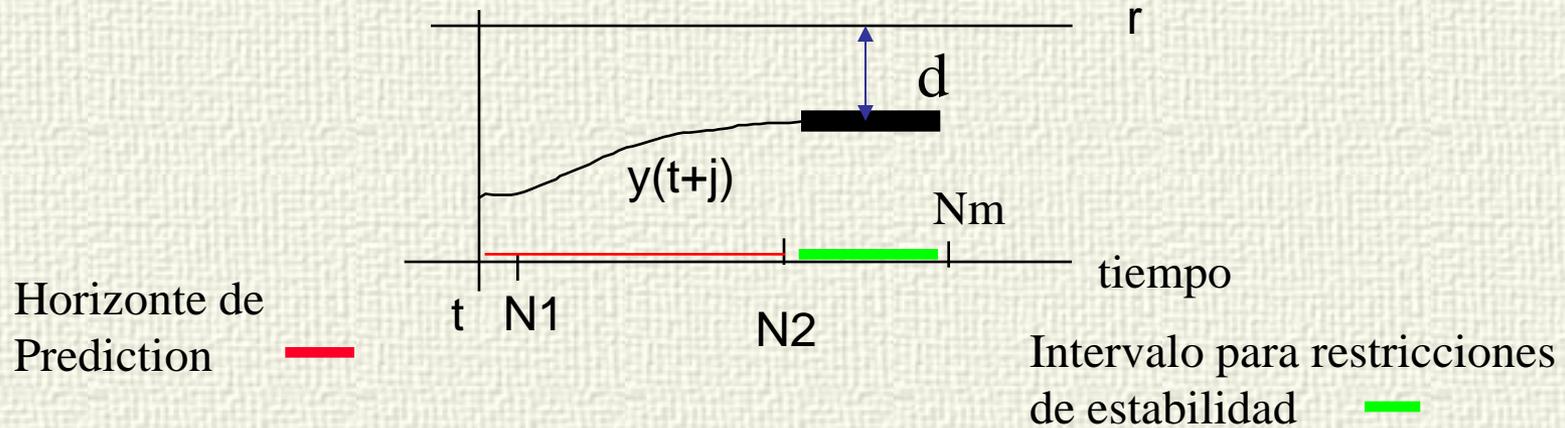
Dividir el problema: estabilidad y respuesta dinámica

Restricciones terminales para asegurar estabilidad en el intervalo $[N2, N2+Nm]$ pero no sobre la referencia

Minimización de la distancia d para asegurar una respuesta adecuada sin error estacionario



Ventajas



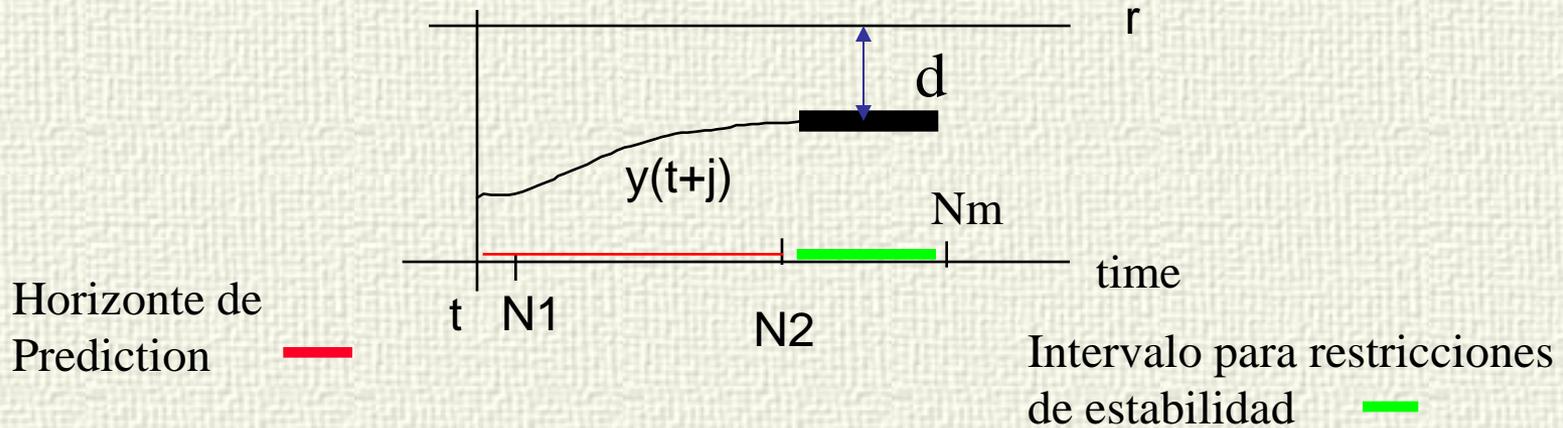
No está limitada a sistemas estables en lazo abierto

No crea problemas de factibilidad

La garantía de estabilidad no se pierde si la referencia no es alcanzable



Planteamiento



$$\min_{\mathbf{u}, d} \sum_{j=N1}^{N2} [\hat{y}(t+j) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{Nu-1} \beta(j) [\Delta u(t+j)]^2 + \lambda d^2$$

$$Y_m \leq \hat{y}(t+j) \leq Y_M$$

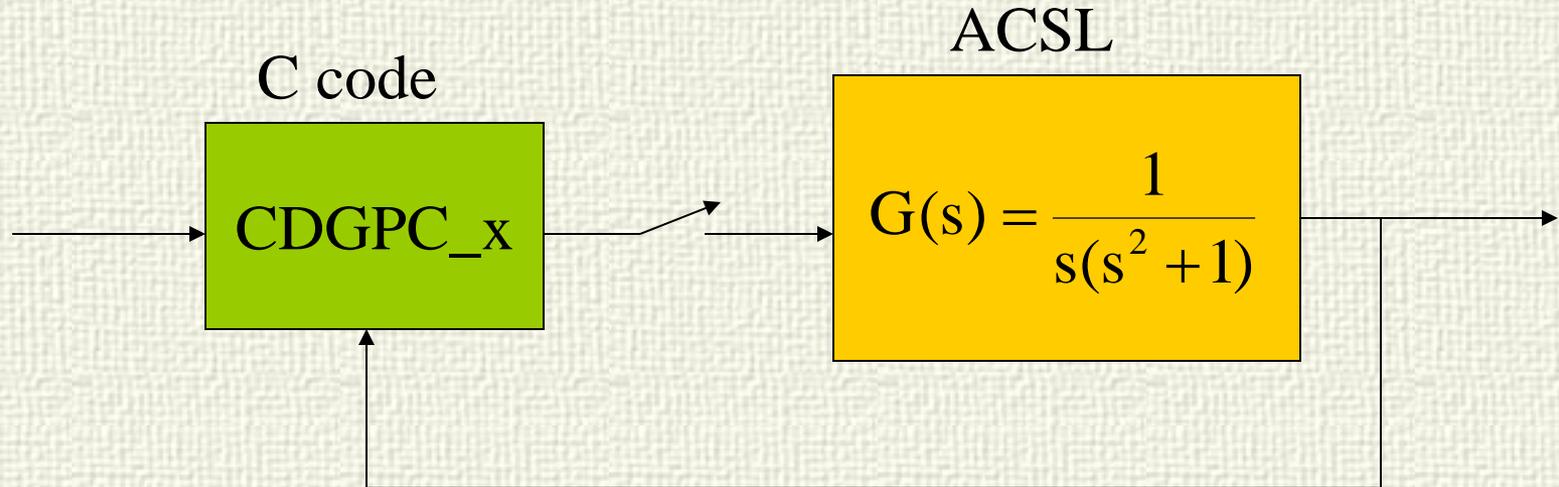
$$U_m \leq u(t+j) \leq U_M$$

$$D_m \leq \Delta u(t+j) \leq D_M$$

$$\begin{cases} \hat{y}(t+N2+1) - r(t+N2+1) = d \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N2+Nm) - r(t+N2+Nm) = d \end{cases}$$



Ejemplo



CDGPC_1 Restricciones terminales

CDGPC_2 Horizonte infinito

CDGPC_3 Optimización de restricciones terminales



Ejemplo en el dominio δ

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

$$\tau=0.1 \quad \Downarrow$$

$$B(\delta) = 0.0017\delta^2 + 0.0999\delta + 0.9992$$

$$A(\delta) = \delta^3 + 0.0999\delta^2 + 0.9992\delta$$

$$T(\delta) = (1+\delta)^4$$

Prediction Horizon $N1 = 1$ $N2 = 7$

Control Horizon $U_n = 3$

Weighting factor $\beta = 0.1$

Internal reference $\alpha = 0.3$

Constraints

$$-5 \leq u(t+j) \leq 5$$

$$-5 \leq \Delta u(t+j) \leq 5$$

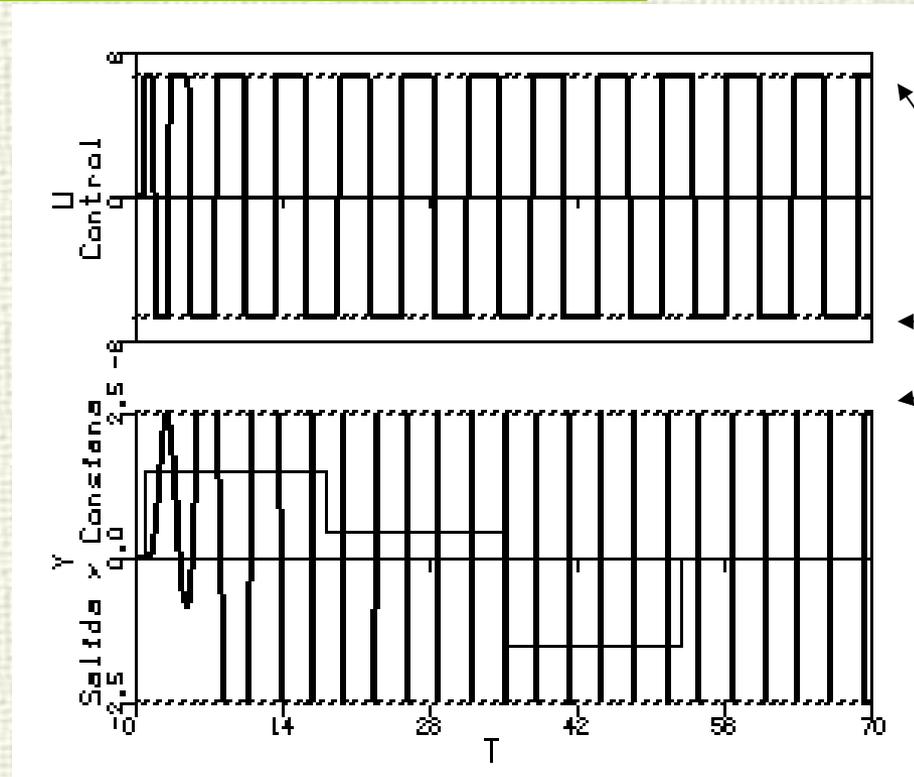
$$-2.5 \leq y(t+j) \leq 2.5$$



GPC, CDGPC,...

u

$y + SP$

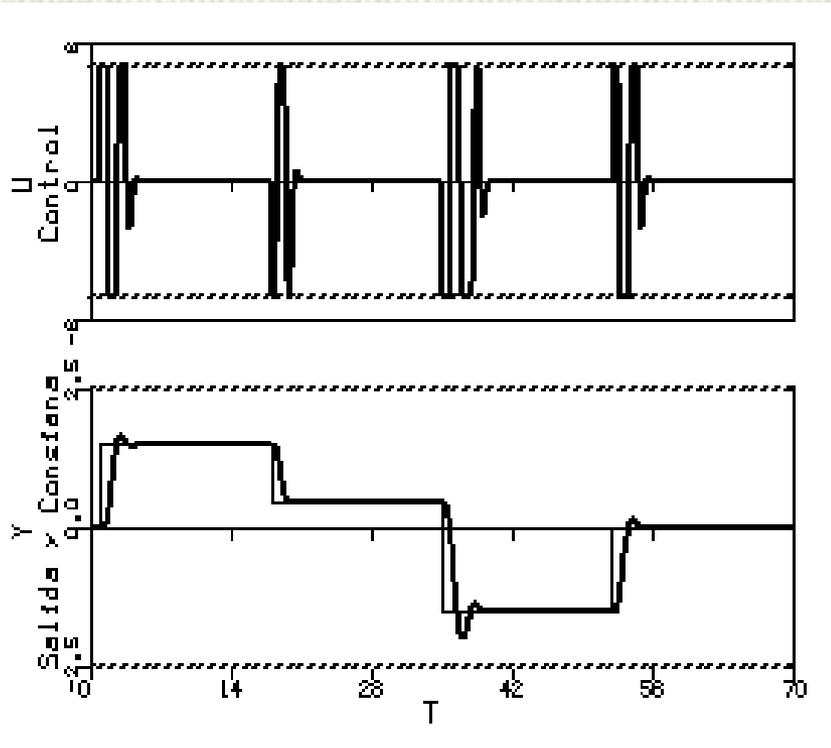


Constraints

Controladores sin consideraciones explícitas de estabilidad no son capaces de estabilizar el sistema



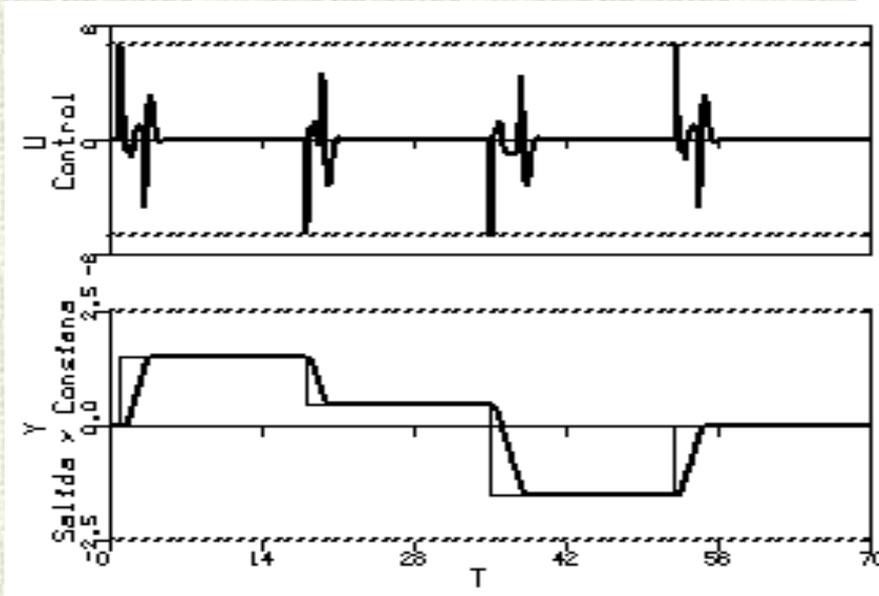
CDGPC_1, _2



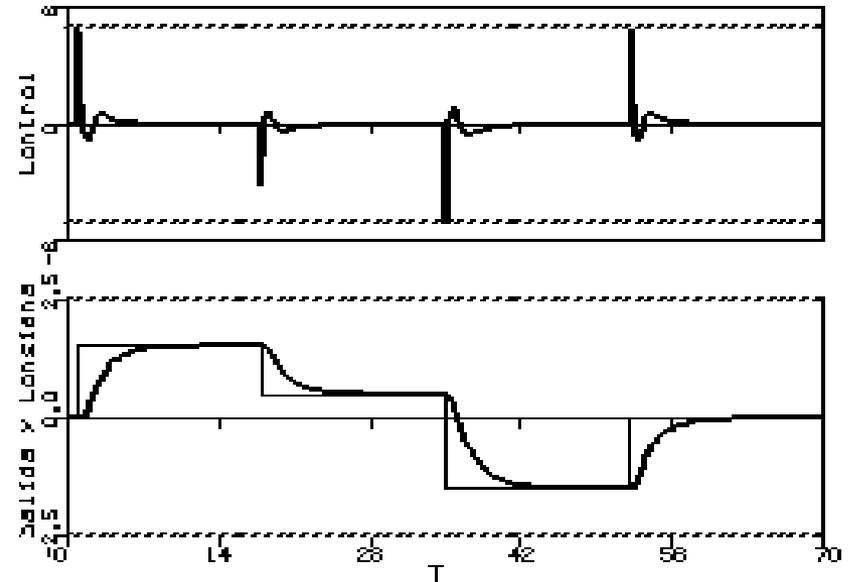
La consideración de restricciones terminales, ($N_m=4$), o horizonte Infinito, ($\mu=10^2$) estabiliza el sistema



CDGPC_3



$$\lambda=10^5$$

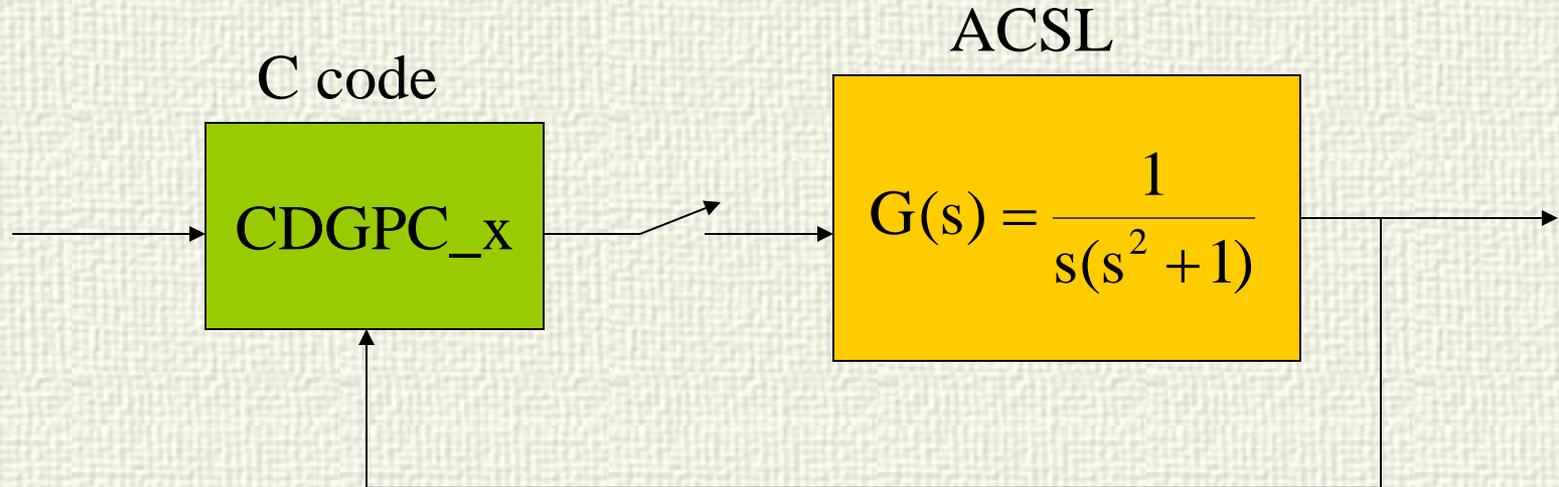


$$\lambda=10^3$$

CDGPC_3 también estabiliza el sistema y puede sintonizarse para obtener distintas respuestas dinámicas



Otras restricciones



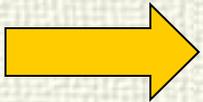
Restricciones

$$-5 \leq u(t+j) \leq 5$$

$$-1.5 \leq \Delta u(t+j) \leq 1.5$$

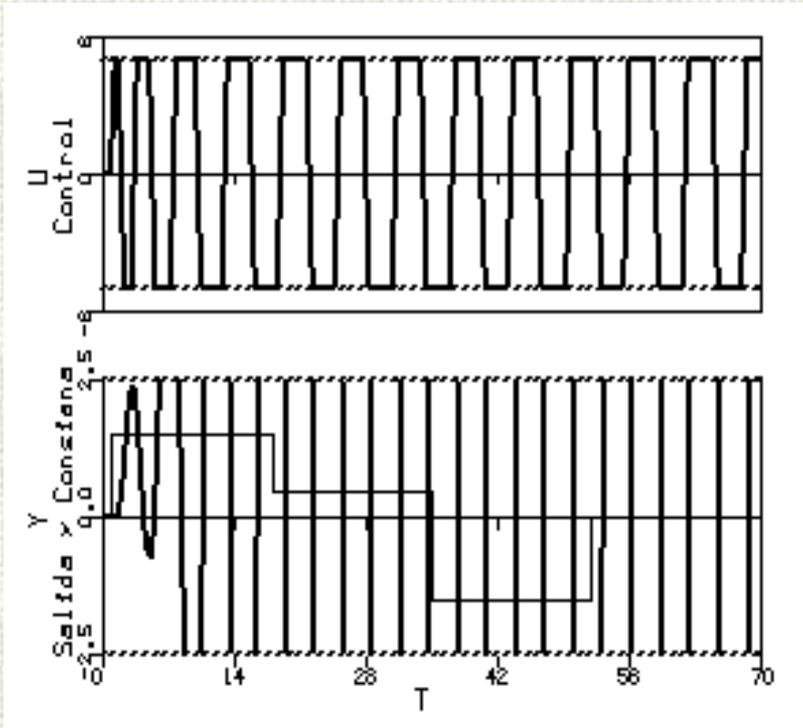
$$-2.5 \leq y(t+j) \leq 2.5$$

Ahora la consigna
no es alcanzable
con las nuevas
restricciones





Consigna no alcanzable

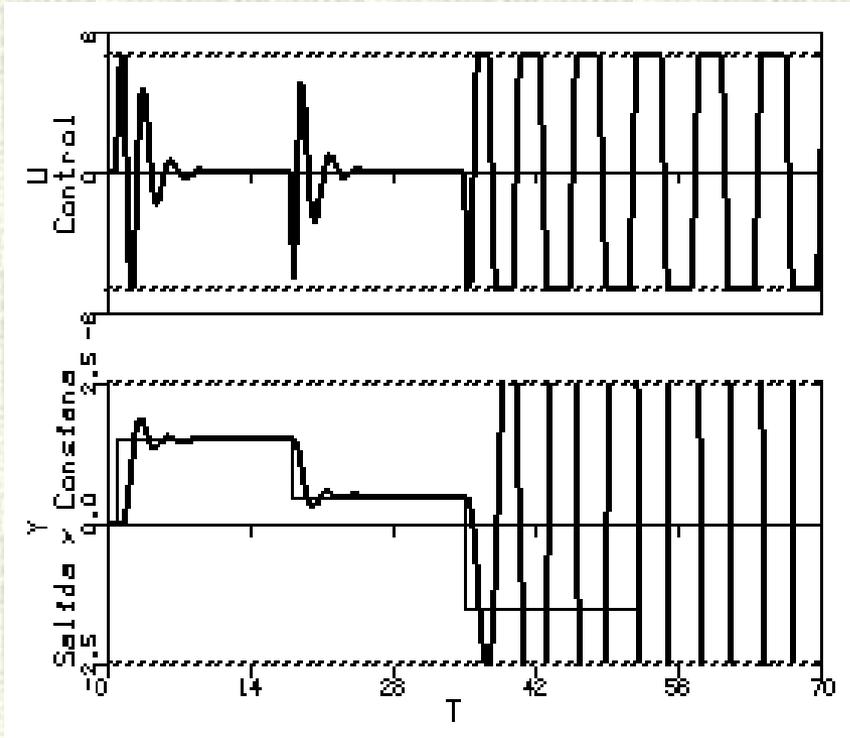


El controlador
CDGPC_1 hace
inestable al sistema

CDGPC_1



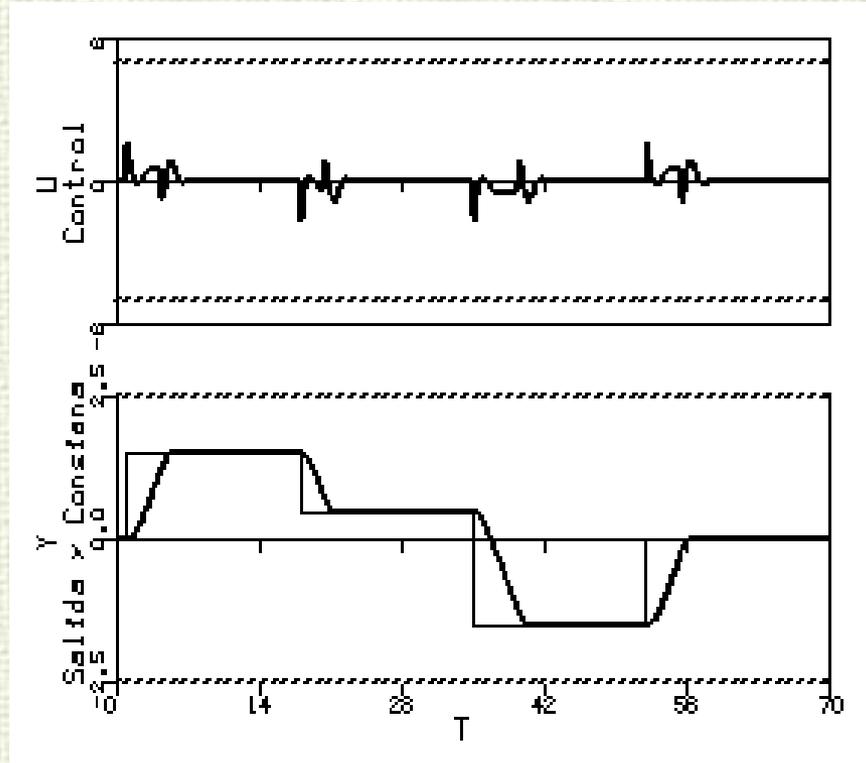
CDGPC_2



Cambiando el parámetro μ es posible estabilizar el sistema, pero al no estar garantizada la estabilidad, pueden obtenerse respuestas como en la figura



CDGPC_3



El sistema es estable, opera dentro de las restricciones y puede sintonizarse para obtener distintas dinámicas con el parámetro λ

$$\lambda=10^4$$



Modelo no lineal

Chen, Allgower 1997

$$\min_{\mathbf{u}} J = \int_t^{\infty} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{R} \mathbf{u} \, d\tau$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}(t) \leq \bar{\mathbf{u}}$$

Condiciones de estabilidad similares al caso lineal:

Es posible garantizar la estabilidad con horizonte infinito. Puede encontrarse una penalización terminal equivalente que haga el problema resoluble bajo ciertas condiciones.

$$\min_{\mathbf{u}} J = \mathbf{x}'(t+T) \mathbf{P} \mathbf{x}(t+T) + \int_t^{t+T} \mathbf{x}' \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}' \mathbf{R} \mathbf{u} \, d\tau$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\underline{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u}(t) \leq \bar{\mathbf{u}}$$



Penalización terminal y control ficticio $u = -Kx$



$$\min_u J = x'(t+T)Px(t+T) + \int_t^{t+T} x'Qx + u'Ru \, d\tau$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$x(t+T) \in \Omega$$

$$\underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$$

La restricción terminal fuerza a los estados a estar dentro de una región terminal invariante que contiene al origen. P y Ω se determinan fuera de línea para que se verifique

$$x'(t+T)Px(t+T) \geq \int_{t+T}^{\infty} x'Qx + u'Ru \, d\tau$$

$$u = -Kx$$

$$\forall x(t+T) \in \Omega \quad \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}$$

La ley $u = -Kx$ se postula para garantizar estabilidad pero no se aplica nunca



Estabilidad NMPC

$$\min_u J(v) = \Phi(z_N) + \sum_{j=0}^{N-1} L(z_j, v_j)$$

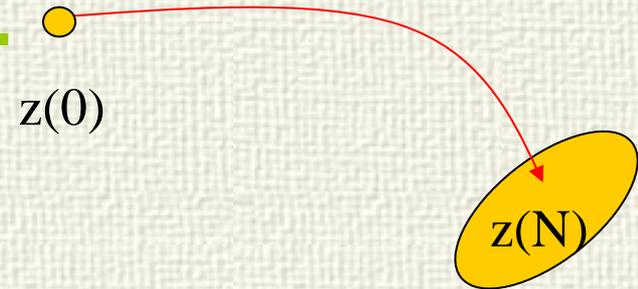
$$z_{j+1} = f(z_j, v_j) \quad z_0 = x_k$$

$$z_j \in X \quad v_j \in U \quad z_N \in X_f$$

$$u_k = v_0^*$$

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

Existen métodos para el diseño de la región terminal y la ley de control asociada, pero pueden no ser fáciles de aplicar



Normalmente se acompaña de una restricción adicional que fuerza el estado en T a estar dentro de una región terminal que contiene al óptimo, en la cual se supone existe una ley de control $u = c(x)$ que mantendría la evolución del sistema dentro de la región terminal. Se supone además que:

$$\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k) \leq -L(x_k, c(x_k)) \quad \forall x \in X_f$$

$$\alpha_1(|x|) \leq L(x_k, u_k) \leq \alpha_2(|x|)$$

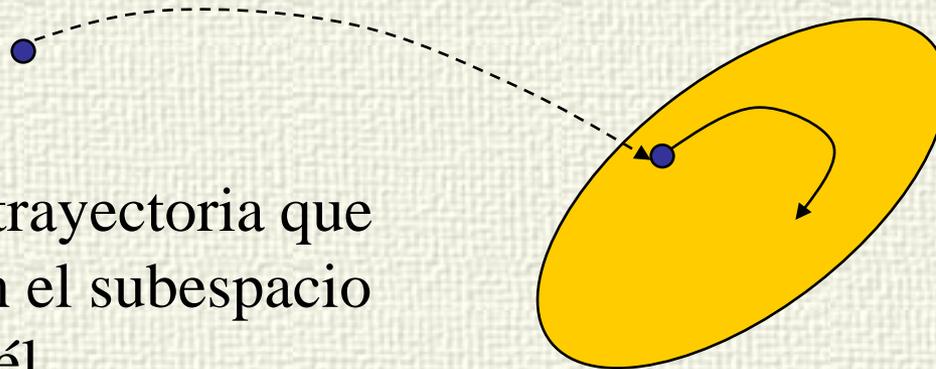
Con α_1, α_2 funciones positivas definidas



Subespacio invariante

- ✓ La región terminal es un subespacio invariante:

Cualquier trayectoria que empiece en el subespacio no sale de él

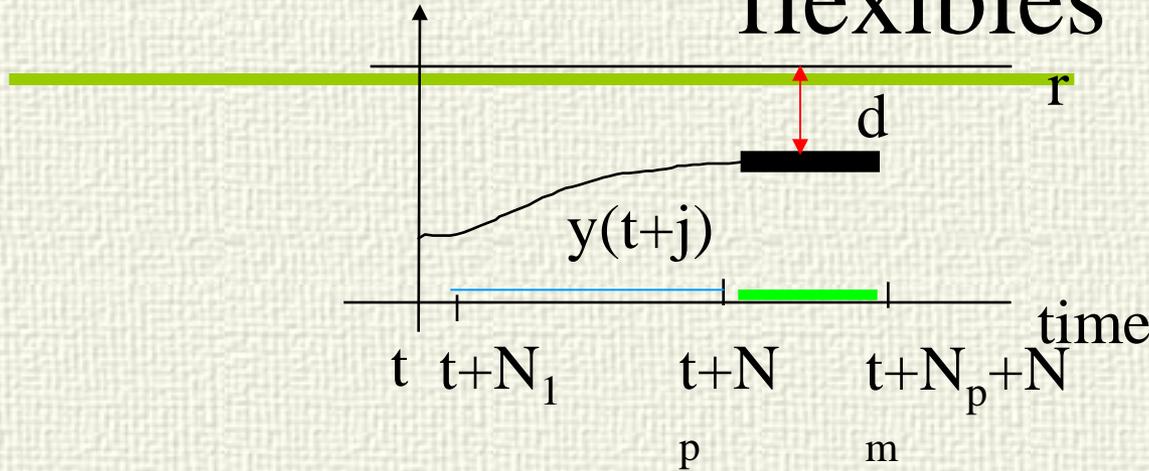




Restricciones terminales



flexibles



Interval for
stability
constraints

$$\min_{\Delta u, d} \int_{t_k}^{t_k+t_p} [\gamma(y(\tau) - r(\tau))]^2 d\tau + \sum_{j=0}^{N_u-1} \beta [\Delta u(t+j)]^2 + \lambda d^2$$

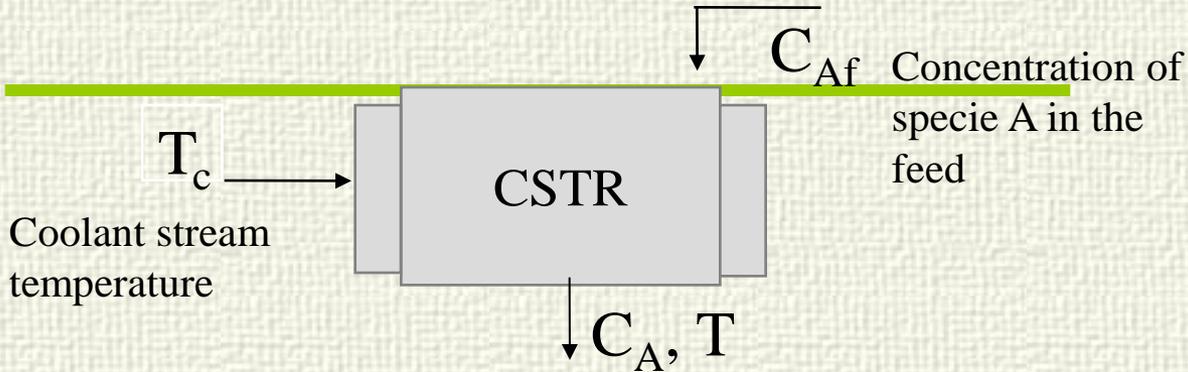
extra degree of freedom $d \in \mathfrak{R}$ extra term

$$\begin{cases} y(t + N_p + 1/t) - r(t + N_p + 1/t) = d \\ \vdots \\ y(t + N_p + N_m/t) - r(t + N_p + N_m/t) = d \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Y_m &\leq y(t+j/t) \leq Y_M \\ U_m &\leq u(t+j/t) \leq U_M \\ D_m &\leq \Delta u(t+j/t) \leq D_M \end{aligned}$$



Simulation example



Operation

Constraints:

$$280 \text{ K} \leq T_c \leq 330 \text{ K}$$

$$340 \text{ K} \leq T \leq 380 \text{ K}$$

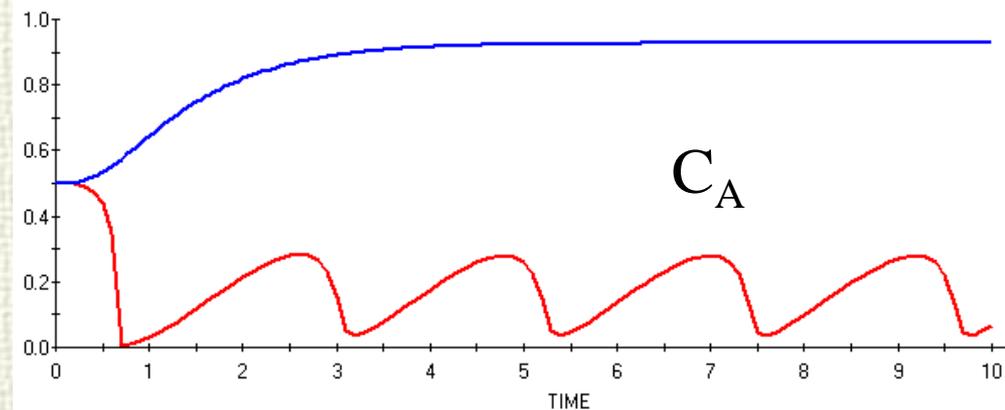
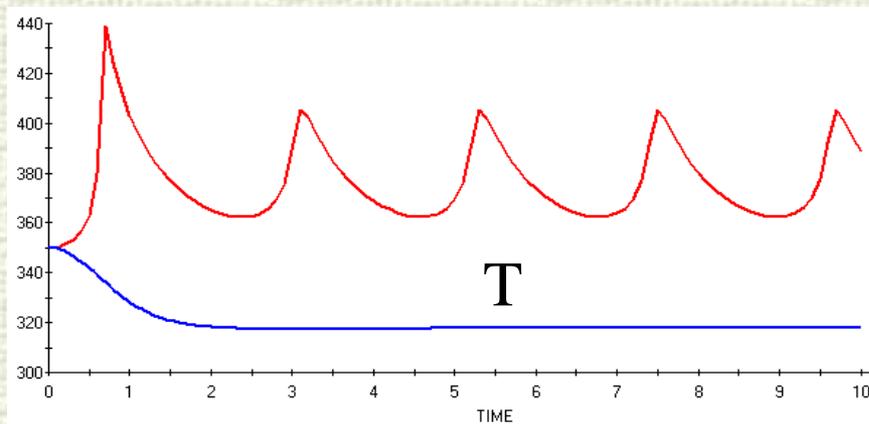
$$0 \leq C_A \leq 1 \text{ mol/l}$$

Significant nonlinearities and varying time constants

— $T_c = 300 + 5 \text{ K}$
— $T_c = 300 - 5 \text{ K}$

Starting from the
equilibrium point

$$\left(\begin{array}{l} C_A^{\text{eq}} = 0.5 \text{ mol/l,} \\ T^{\text{eq}} = 350 \text{ K,} \\ T_c^{\text{eq}} = 300 \text{ K} \end{array} \right)$$



The objective is to control T and C_A by manipulating T_c .



Simulation example: **Tracking performance**



Input constraints

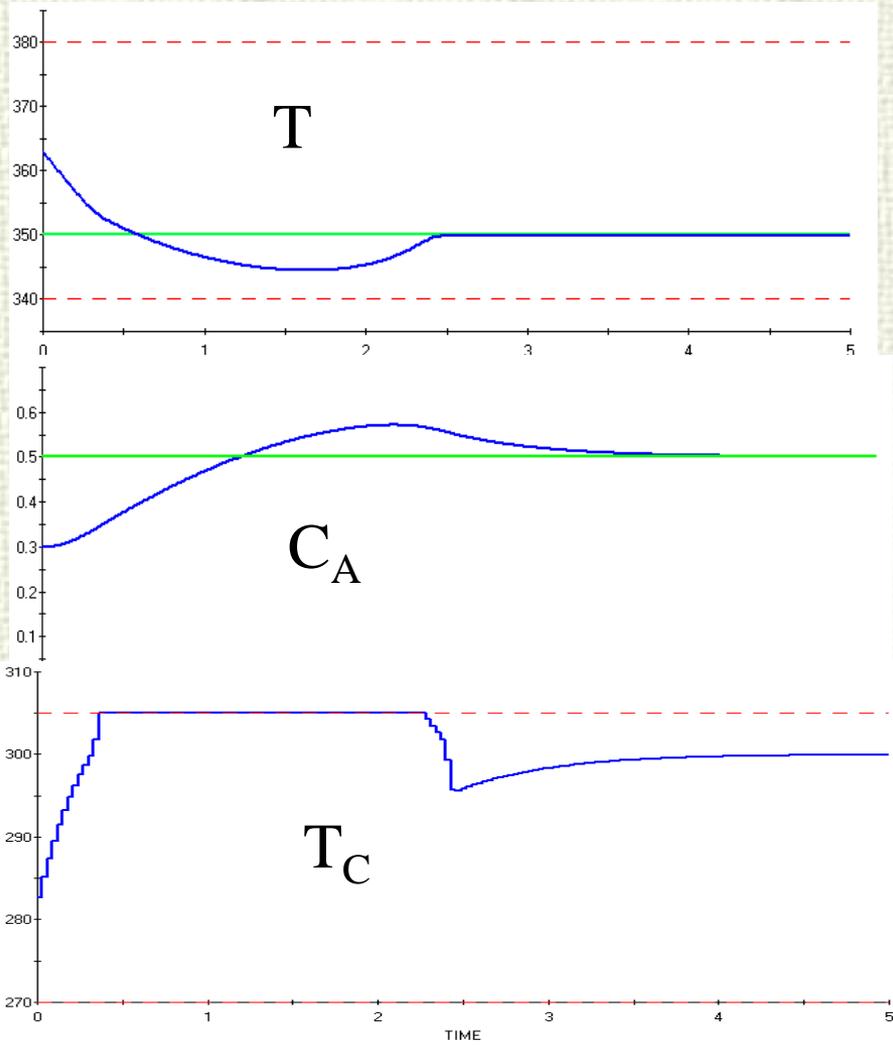
$$270 \text{ K} \leq T_c \leq 305 \text{ K}; |\Delta T_c| \leq 5$$

Prediction horizon: $N_p=15$

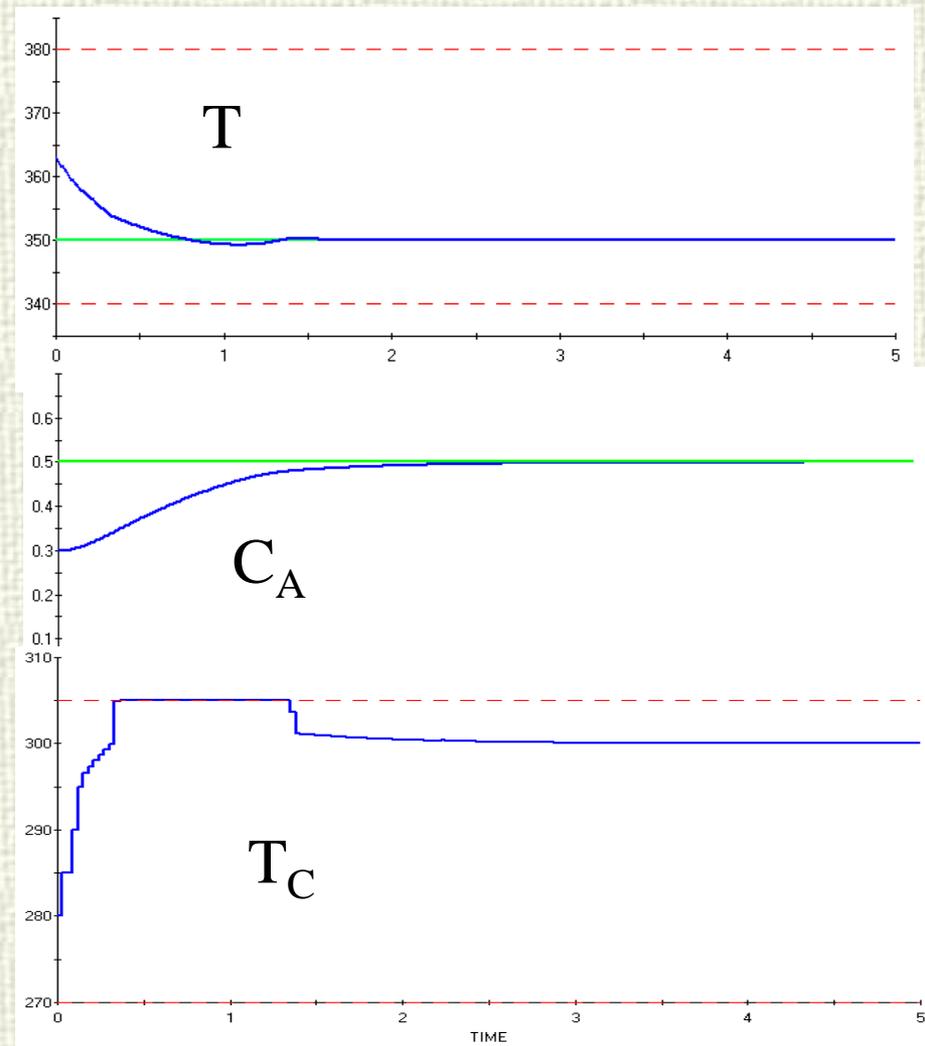
Control horizon: $N_u=2$

$$N_m=3$$

NMPC



Stable NMPC





Simulation example: Tracking performance



Input constraints

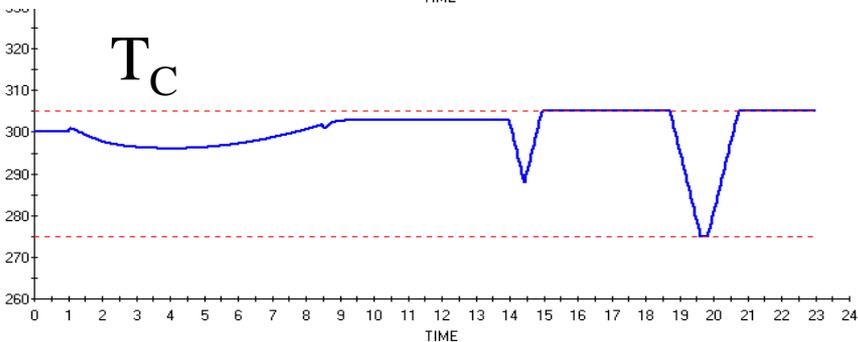
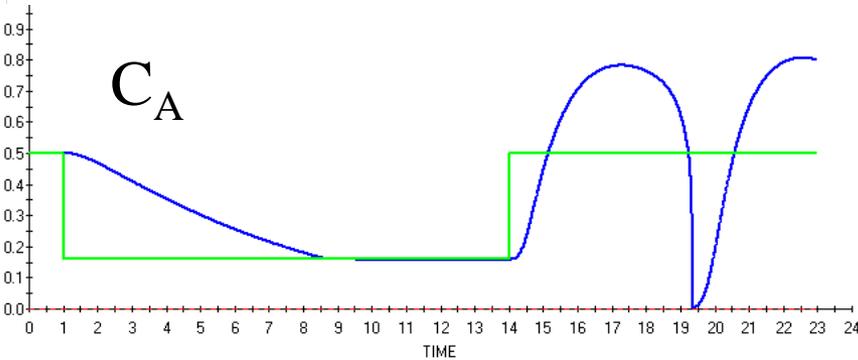
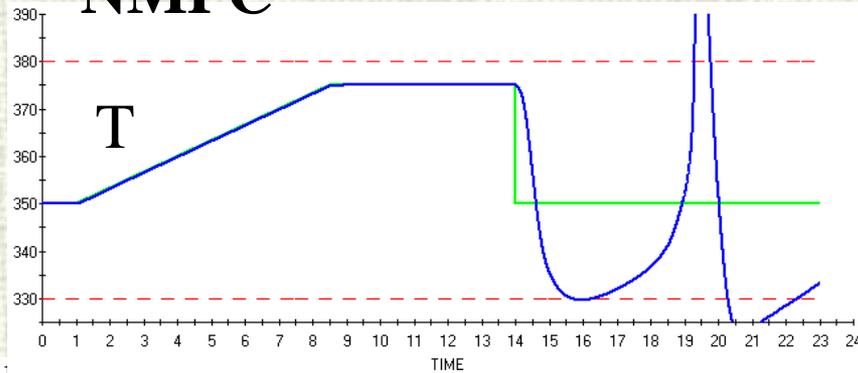
$$275 \text{ K} \leq T_c \leq 305 \text{ K}; |\Delta T_c| \leq 1$$

Prediction horizon: $N_p=8$

Control horizon: $N_u=2$

$$N_m=3$$

NMPC



Stable NMPC

