

Proceso de señal

Prof. Cesar dePrada

ISA-UVA

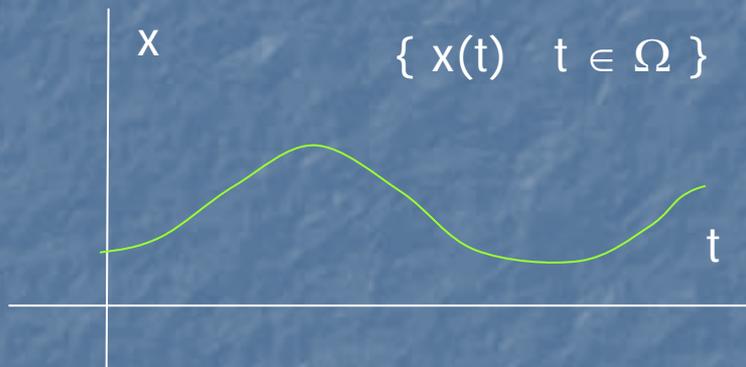
prada@autom.uva.es

Indice

- Procesos estocásticos
- Caracterización de series temporales
 - Correlaciones
 - Análisis espectral
 - Ruidos blancos
- Modelos de señales estocásticas
 - ARMA
 - Test de Estacionareidad
 - Autocorrelación parcial
 - Modelos Box-Jenkins

Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias indexadas por un índice t , que normalmente será el tiempo

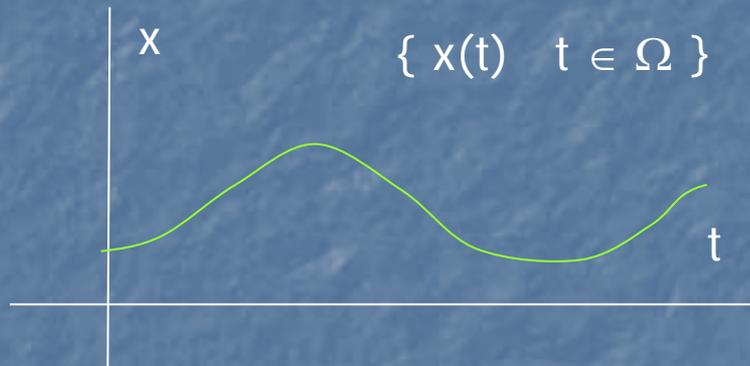


$x(t)$ puede ser un vector o un escalar

t puede tomar valores continuos o discretos kT

Un proceso estocástico discreto $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)\}$ viene caracterizado por la probabilidad conjunta: $p(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$ que da la probabilidad de que x en t_i tome el valor $\theta_i \leq x \leq \theta_i + d\theta_i$

Procesos estocásticos



Pueden caracterizarse por una serie de parámetros probabilísticos

$$E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x(t))dx$$

$$\text{var}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E\{x(t)\}]^2 p(x(t))dx$$

Etc.

Procesos estocásticos estacionarios



Un proceso estocástico es estacionario en sentido estricto cuando:

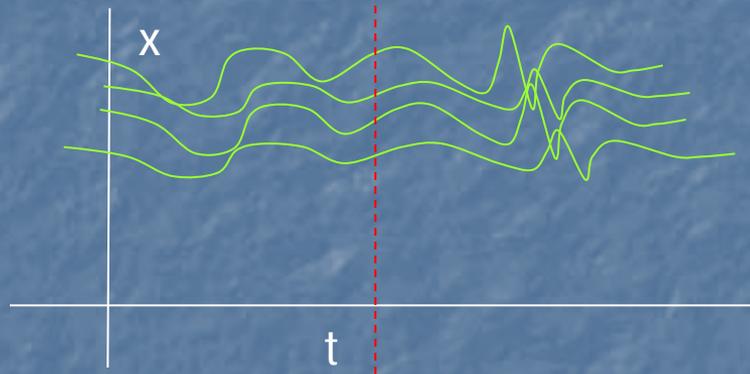
$$p(x(t_1), \dots, x(t_N)) = p(x(t_1 + \tau), \dots, x(t_N + \tau)) \quad \forall t_i, \tau \in \Omega,$$

En particular: $p(x(t)) = p(x(t + \tau)) = p(x)$ es independiente de t , por tanto:

$$E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x(t))dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = E\{x\} = \text{constante}$$

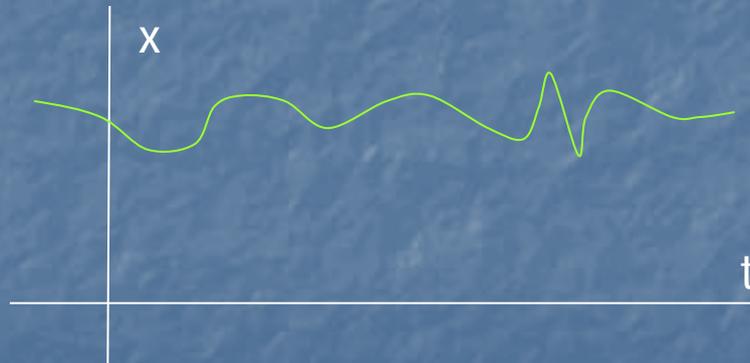
$$p(x(t_1), x(t_2)) = p(x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau)) \Rightarrow p(x(t + \tau), x(t)) \text{ depende de } \tau \text{ no de } t$$

Procesos estacionarios ergódicos



Un proceso estacionario es ergódico si su valor esperado iguala al valor medio temporal

$$E\{x\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$



Se supondrá que el proceso es ergódico

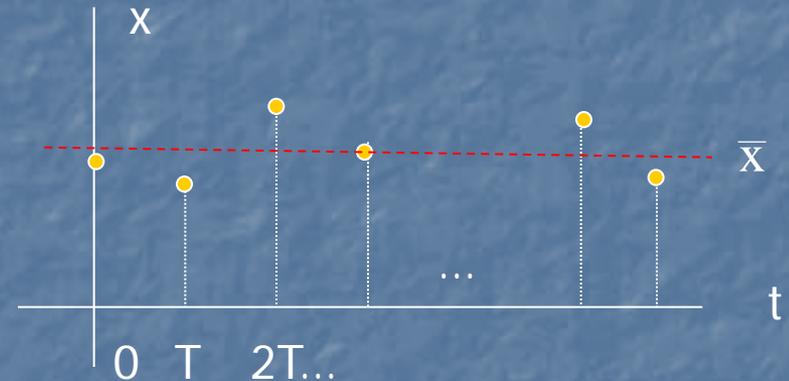
de forma que se obtiene el mismo valor de $E\{x\}$ calculando la media temporal de una realización (o experimento de medida de x) de infinitos valores que con muchos hipotéticos experimentos en un instante de tiempo t

Series temporales

$$x(0), x(T), x(2T), \dots, x((N-1)T)$$



$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_{N-2}, X_{N-1}$$



Realización de un proceso estocástico $\{x_i\}$

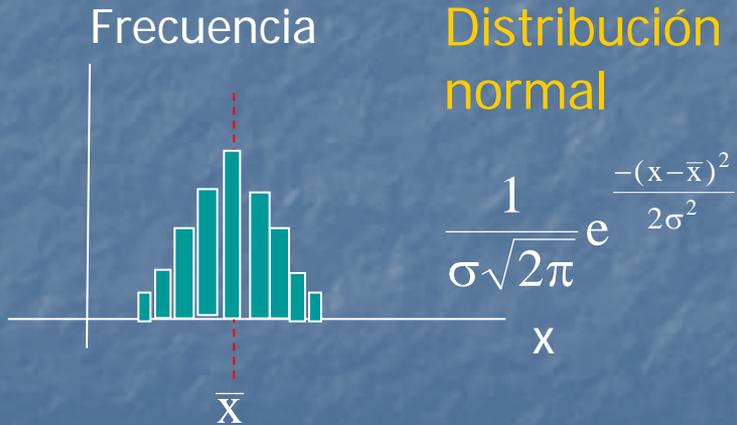
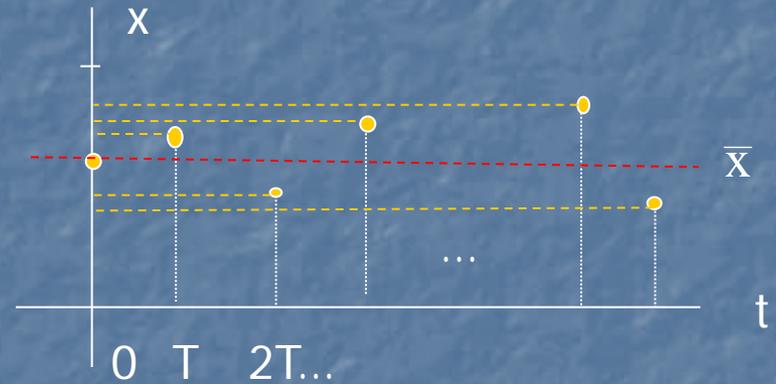
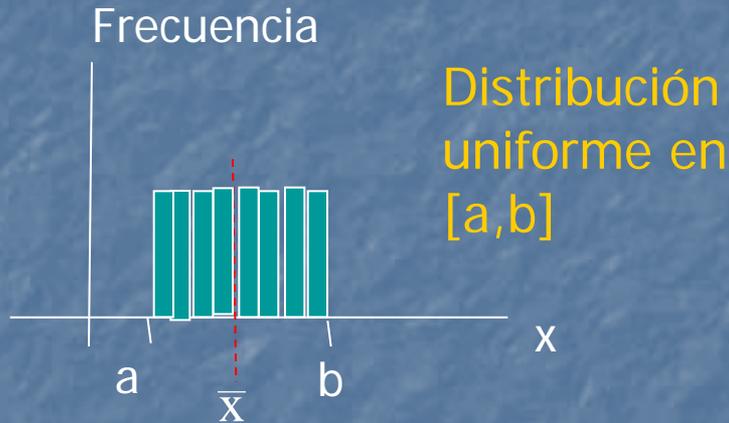
Caracterización estadística:

Media $\bar{x} = E\{x\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t$

Varianza $\sigma^2 = E\{(x - \bar{x})^2\} \approx \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} (x_t - \bar{x})^2$

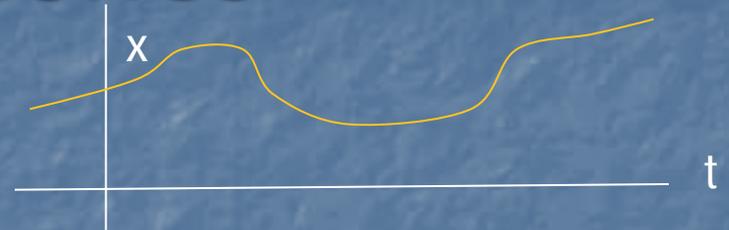


Distribuciones



Función densidad de probabilidad

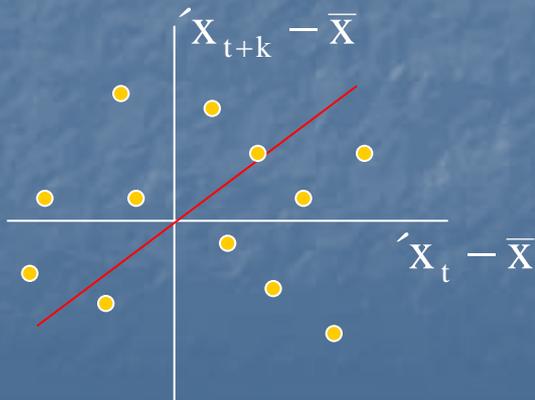
Correlaciones



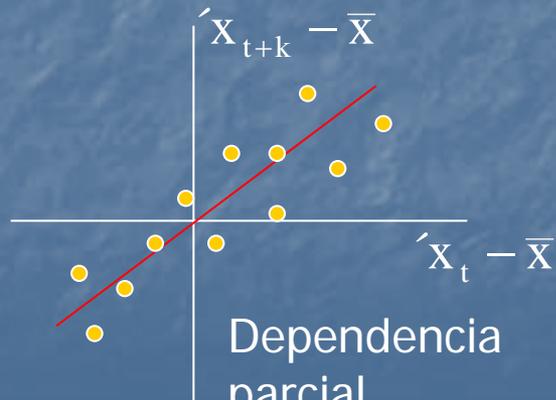
p.e. $k = 2$

Formar parejas (x_t, x_{t+k}) y representarlas gráficamente para estudiar las posibles dependencias

Dada una serie temporal x_i ,
¿Cómo influye el valor que toma x en el instante t sobre el valor que va a tomar en $t+kT$?

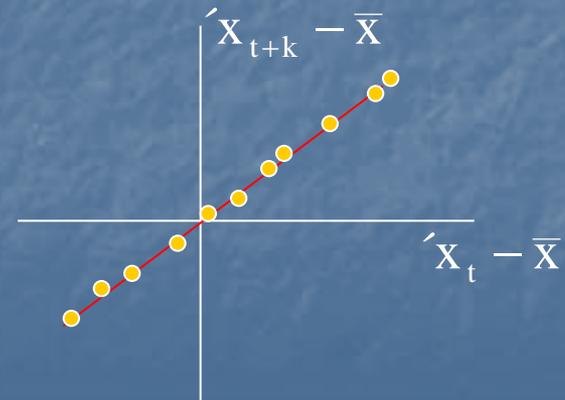


No hay dependencia



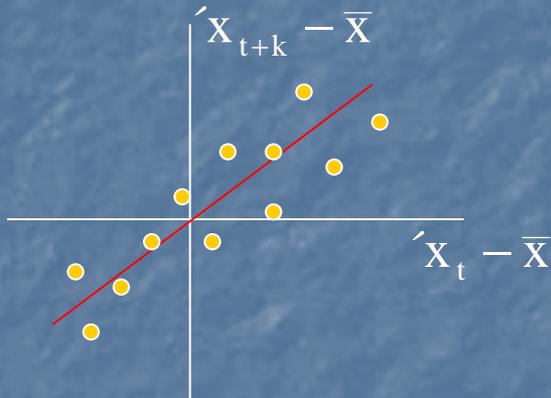
Dependencia parcial

Cesar de Prada ISA-UVA



Dependencia completa

Autocovarianza



¿Como medir el grado de dependencia?

Se puede usar el valor medio de los cuadrados de las desviaciones sobre la recta de regresión $m(x_t - \bar{x})$

$$E\left\{\left[(x_{t+k} - \bar{x}) - m(x_t - \bar{x})\right]^2\right\} = E\left\{[x_{t+k} - \bar{x}]^2\right\} + m^2 E\left\{[x_t - \bar{x}]^2\right\} - 2mE\left\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\right\} = \sigma^2(1 + m^2) - 2mE\left\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\right\}$$

Las desviaciones serán pequeñas si el término $E\left\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\right\}$ es grande

Autocovarianza de x

$$R_x(k) = E\left\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

Propiedades de $R_x(k)$

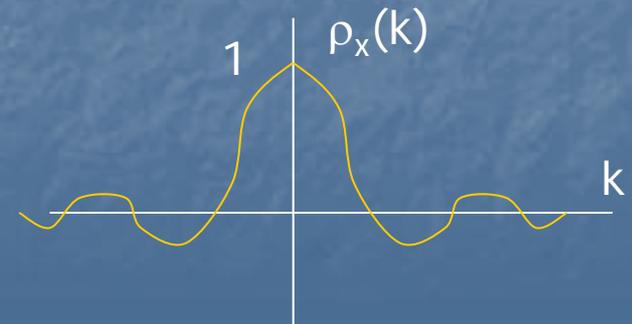
$$R_x(k) = E\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

- 1 $R_x(0) = E\{(x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} = \sigma^2$
- 2 La máxima dependencia de x_t es sobre x_t luego el máximo de $R_x(k)$ está en $R_x(0)$
- 3 La dependencia de x_{t+k} del valor x_t es la misma que la dependencia de x_t sobre x_{t+k} , luego $R_x(k)$ es simétrica respecto a k : $R_x(k) = R_x(-k)$
- 4 Si k crece, la dependencia de x_{t+k} del valor x_t es cada vez menor, luego: $R_x(\infty) \rightarrow 0$

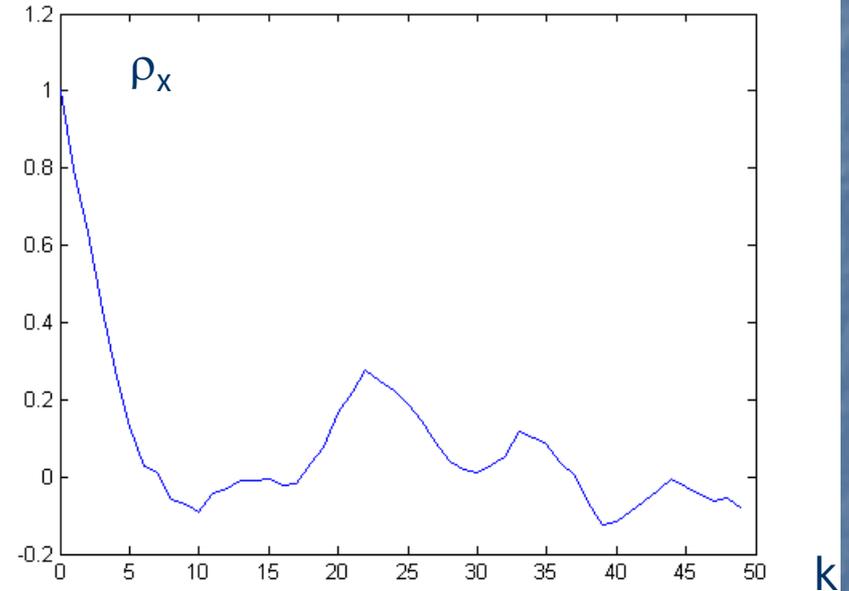
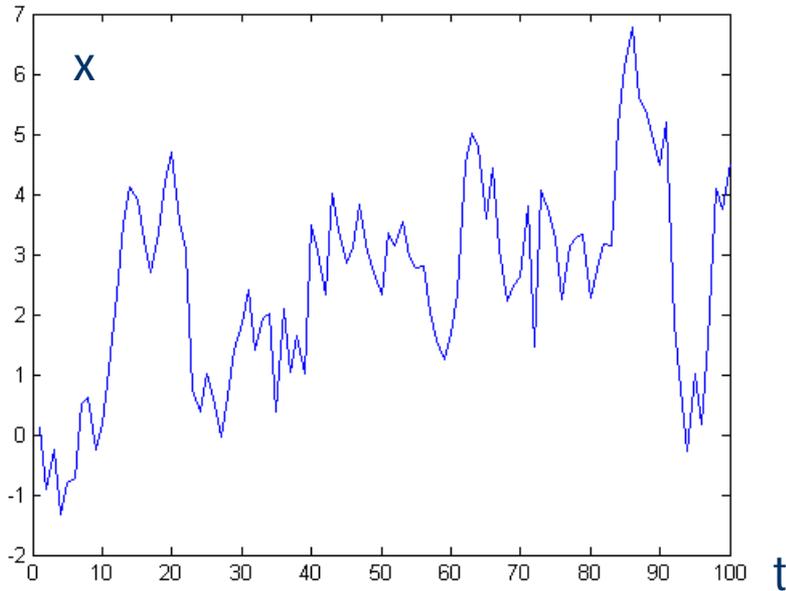
Coefficiente de autocorrelación

$$\rho_x(k) = \frac{R_x(k)}{\sigma^2}$$

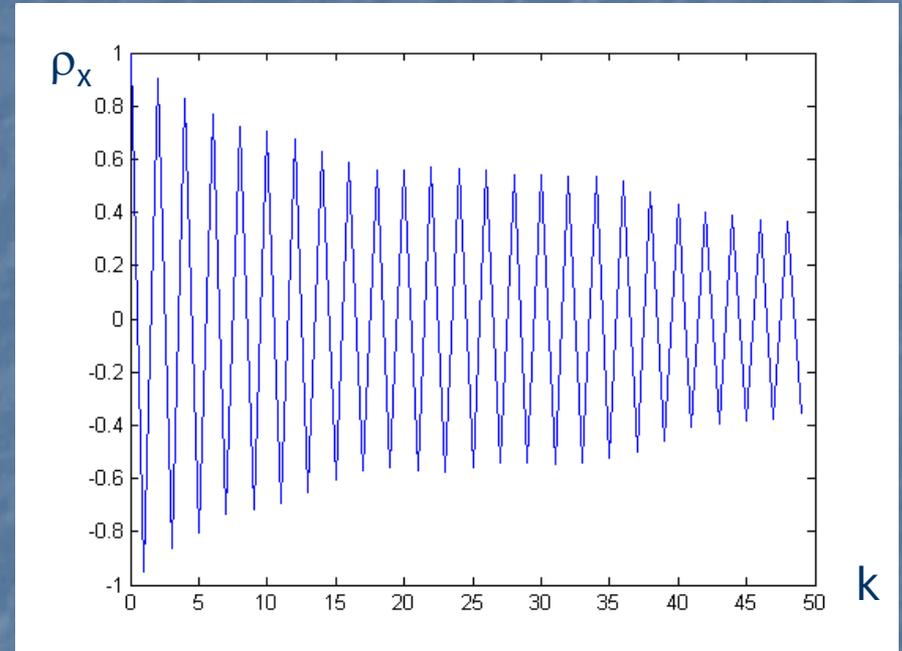
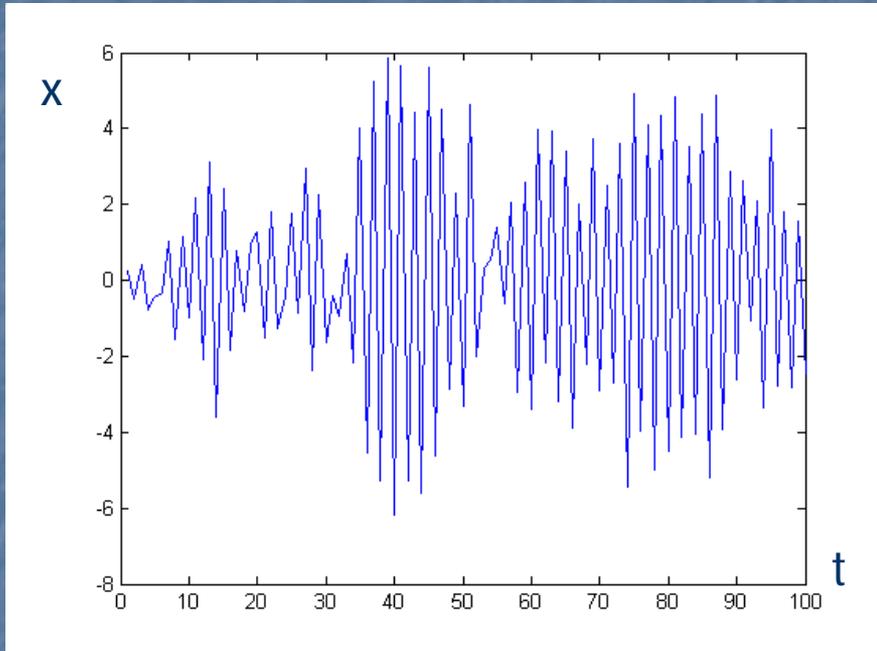
adimensional,
de modulo ≤ 1



Ejemplos



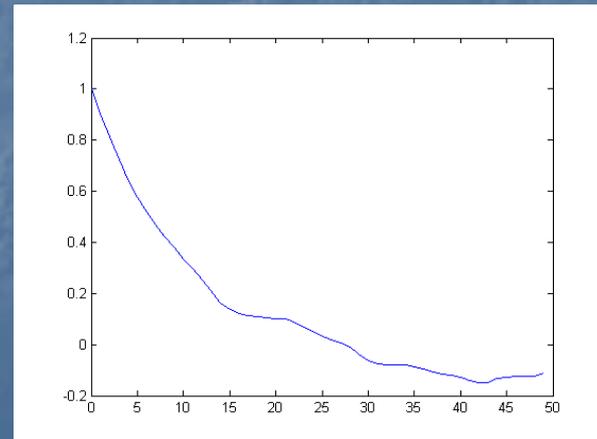
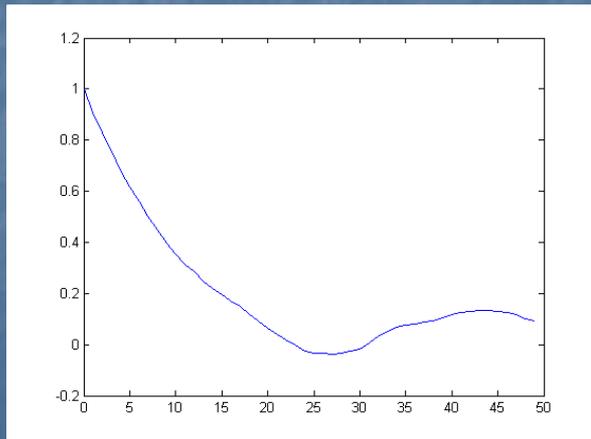
Ejemplos



Estimadores

Si hubiéramos tomado otros datos del mismo proceso estocástico $\{x_i\}$ los resultados de aplicar la fórmula de estimación de $R_x(k)$ hubieran sido similares pero diferentes. De hecho un estimador de una variable estocástica. Por tanto los de la media, varianza, autocovarianza, etc. son variables estocásticas que tienen su distribución, etc. y una serie de propiedades que pueden estudiarse.

$$R_x(k) = E\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$



Propiedades de un estimador

- Sesgo /polarización
- Consistencia
- Eficiencia

θ estimador de una variable estocástica

θ_0 verdadero valor de θ

Consistencia: $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \theta_0$

No sesgo: $E\{\theta\} = \theta_0$

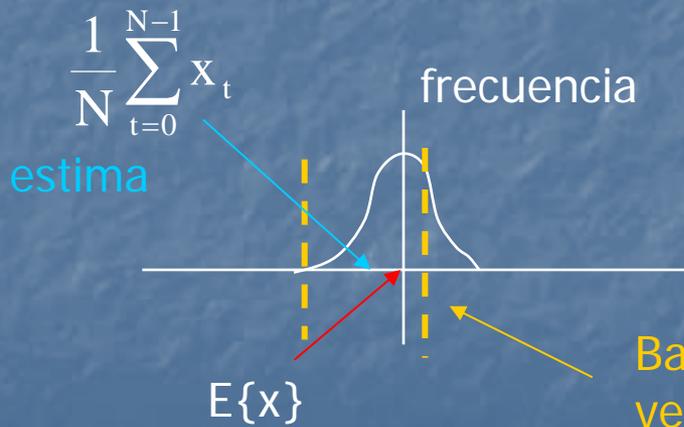


Estimadores

$$\bar{x} = E\{x\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t$$

Estimador eficiente, consistente, no polarizado.
(para distribuciones normales de varianza σ^2).

Las estimas están distribuidas con una distribución normal de varianza σ^2/N en torno al verdadero valor (luego al aumentar N mejora la estimación)



$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (95\%)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} x_t \pm t_{N-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

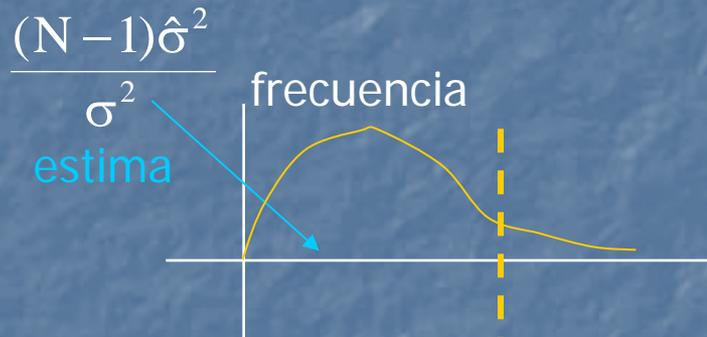
(95%)

Distribución t
de N-1
grados de
libertad

Bandas de confianza en las que el verdadero valor debe estar incluido con una cierta probabilidad

Estimadores

$$\sigma^2 = E\{(x - \bar{x})^2\} \approx \frac{1}{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} (x_t - \bar{x})^2$$



$$p(x) = \frac{x^{\frac{v-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(v/2)} \quad v > 0$$

v grados de libertad

Estimador eficiente, consistente, no polarizado. (para distribuciones normales de varianza σ^2).

Las estimas están distribuidas de modo que

$$\frac{(N-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

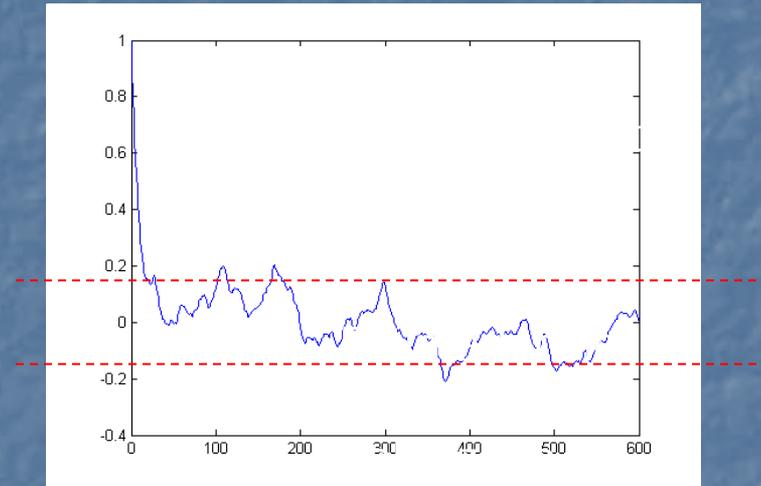
tiene una distribución chi-cuadrado χ^2 con $N-1$ grados de libertad

Estimadores

Estimador eficiente
polarizado

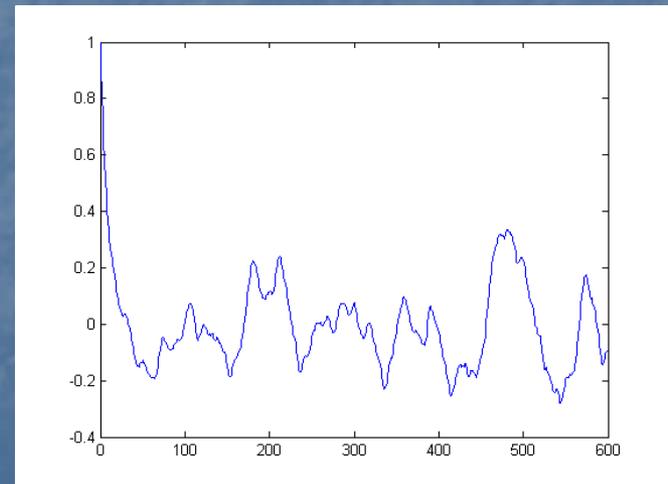
$$\begin{aligned} R_x(k) &= E\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \end{aligned}$$

Bandas de confianza, dentro, $R_x(k)$ no es significativamente distinto de cero



Estimador no eficiente,
no polarizado

$$\begin{aligned} R_x(k) &= E\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} \approx \\ &\approx \frac{1}{N-k} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \end{aligned}$$



Estimadores

Estimador eficiente
polarizado

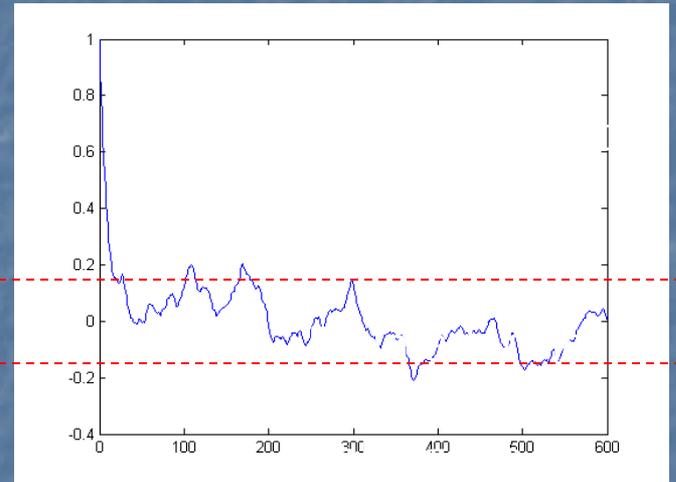
$$R_x(k) = E\{(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})\} \approx \\ \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$$

$$\rho_x(k) = \frac{R_x(k)}{\sigma^2}$$

Bandas de confianza, dentro, $\rho_x(k)$ no es significativamente distinto de cero

El coeficiente de autocorrelación es significativamente diferente de cero con un nivel de significación α si

$$\left| \rho_x \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_x^2}} \right| \geq t_{\alpha/2, n-2}$$



Bandas de confianza

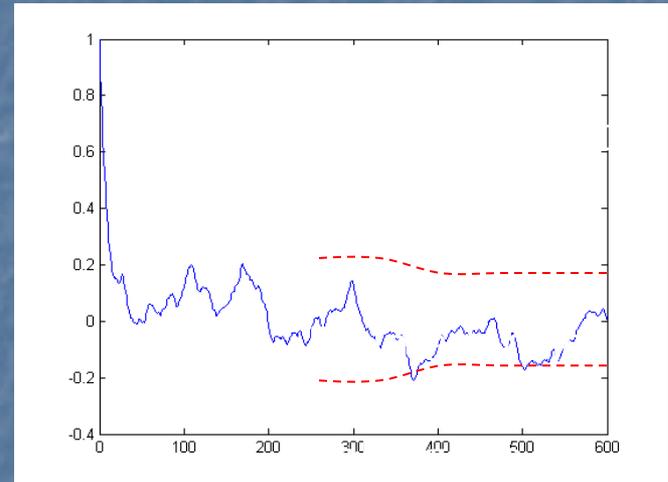
Si $\rho_x(k) = 0$ para $k \geq d$

entonces

$$\text{var}(\rho_x(k)) \approx \frac{1}{N} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^{d-1} \rho_x(i)^2 \right] \quad k \geq d$$

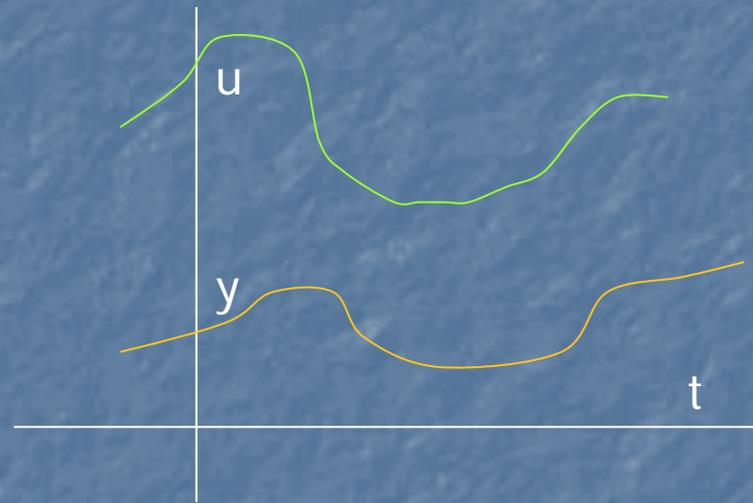
El intervalo de confianza del 95% de que el coeficiente de autocorrelación será cero para $k \geq d$ es:

$$\left[-2\sqrt{\text{var}(\rho_x(k))}, 2\sqrt{\text{var}(\rho_x(k))} \right]$$



↑
d

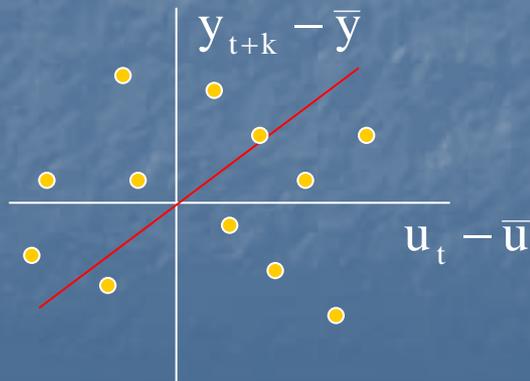
Correlación cruzada



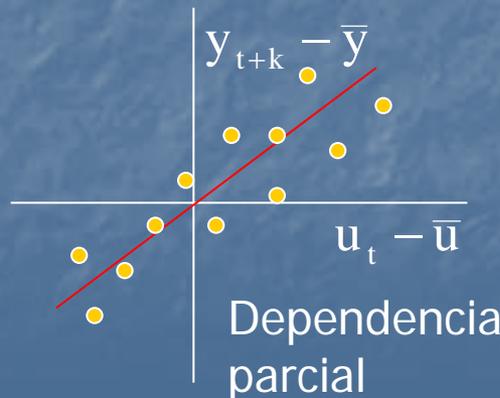
¿Cómo influye el valor que la variable u toma en el instante t sobre el valor que la variable y toma en el instante $t+k$?

$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-3}, u_{N-2}, u_{N-1}$
 $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-2}, y_{N-1}$

p.e. $k=2$



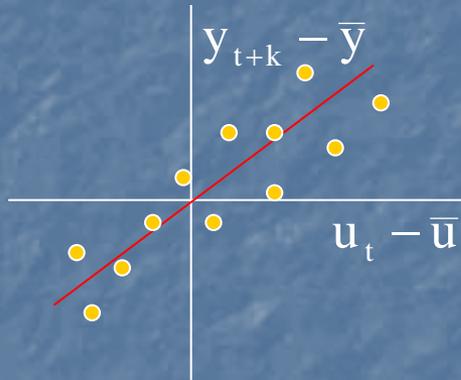
No hay dependencia



Dependencia parcial

Formar parejas (u_t, y_{t+k}) y representarlas gráficamente para estudiar posibles dependencias

Covarianza Cruzada



¿Como medir el grado de dependencia?

Se puede usar el valor medio de los cuadrados de las desviaciones sobre la recta de regresión $m(u_t - u)$

$$E\left\{\left[(y_{t+k} - \bar{y}) - m(u_t - \bar{u})\right]^2\right\} = E\left\{[y_{t+k} - \bar{y}]^2\right\} + m^2 E\left\{[u_t - \bar{u}]^2\right\} - 2mE\left\{(y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})\right\} = \sigma_y^2 + m^2 \sigma_u^2 - 2mE\left\{(y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})\right\}$$

Las desviaciones serán pequeñas si el término $E\left\{(y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})\right\}$ es grande

Covarianza
cruzada de u e y

$$R_{uy}(k) = E\left\{(y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})\right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})$$

Propiedades de $R_{uy}(k)$

$$R_{uy}(k) = E\{(y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})\} \approx \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})$$

La misma influencia tiene u_t sobre y_{t+k} que y_{t+k} sobre u_t por tanto:

$$R_{uy}(k) = R_{yu}(-k)$$

Cuando $k \rightarrow \infty$ la influencia decrece a cero, luego $R_{uy}(\infty) = 0$

Coeficiente de correlación cruzada

$$\rho_{uy}(k) = \frac{R_{uy}(k)}{\sigma_u \sigma_y}$$

adimensional

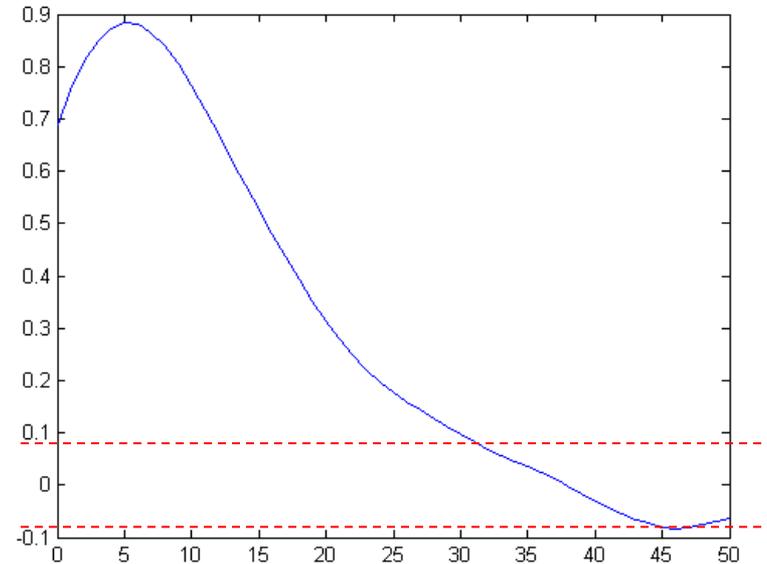
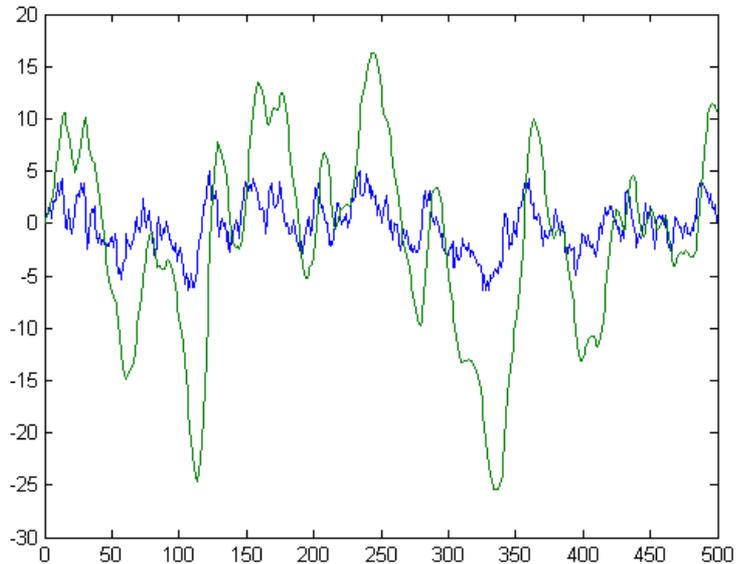
$$\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-k-1} (y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})$$

Estimador eficiente

$$\frac{1}{N-k} \sum_{t=0}^{N-k-1} (y_{t+k} - \bar{y})(u_t - \bar{u})$$

Estimador no polarizado

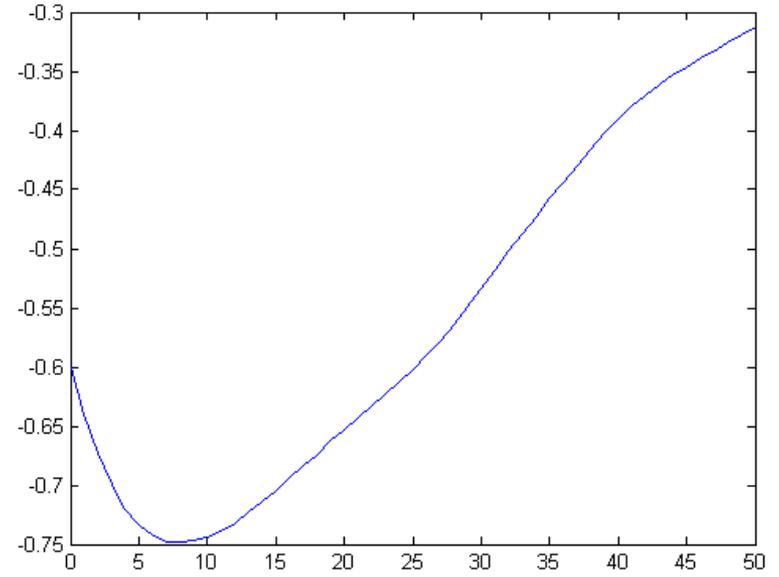
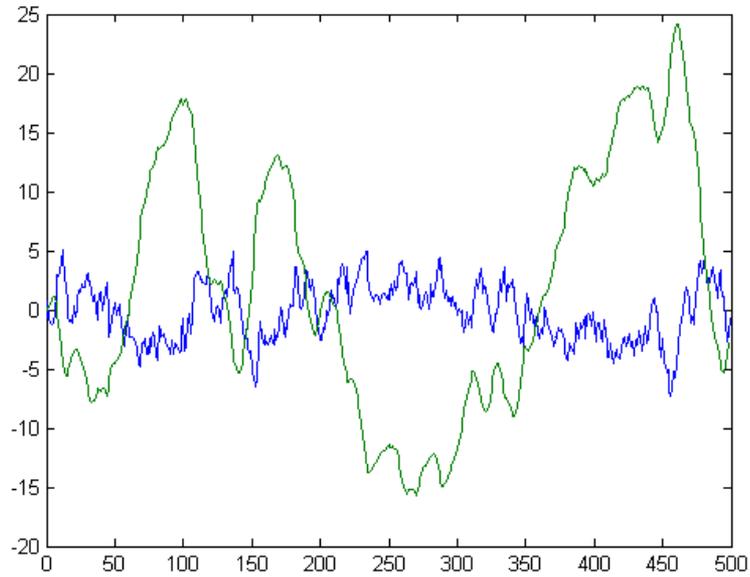
Ejemplo



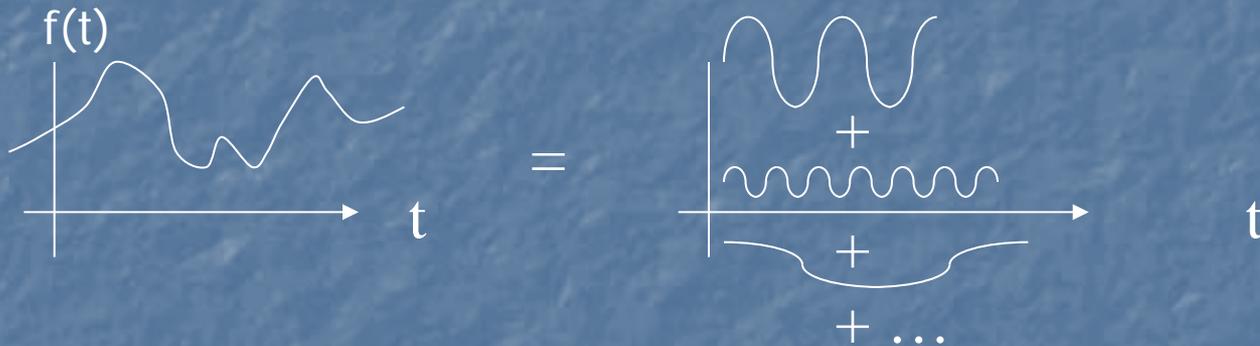
El coeficiente de correlación cruzada es significativamente diferente de cero con un nivel de significación α si

$$\left| \rho_{u,y} \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_{u,y}^2}} \right| \geq t_{\alpha/2, n-2}$$

Ejemplo



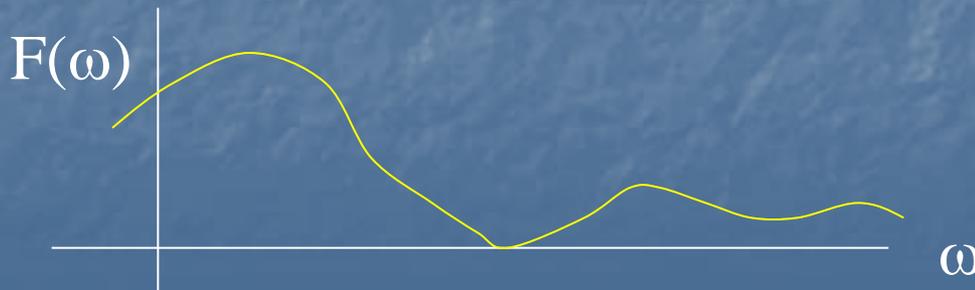
Componentes de frecuencia de una señal



$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)$$

senos

$$F(\omega) = \text{amplitud de la componente de frecuencia } \omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$



Transformada de Fourier

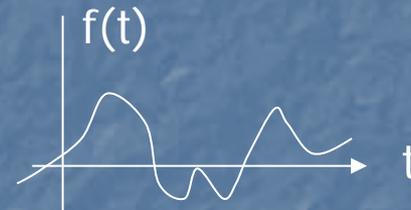
Espectro de frecuencias de la señal

Análisis espectral

Para que exista la transformada de Fourier de una señal $f(t)$ esta ha de verificar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty$$

Una señal estocástica no verificará esta condición por lo que el análisis en frecuencia ha de hacerse con otras herramientas.



Se define el **espectro de potencia** de una señal $x(t)$ como la transformada de Fourier de su autocovarianza.

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Espectro de potencia

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} E\{|X(\omega)|^2\} &= E\{X(\omega)X(\omega)^*\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (x(v) - \bar{x})e^{-j\omega v} dv \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \bar{x})e^{j\omega t} dt\right\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x(v) - \bar{x})(x(t) - \bar{x})e^{-j\omega(v-t)} dv dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{(x(v) - \bar{x})(x(t) - \bar{x})\} e^{-j\omega(v-t)} dv dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(v-t) e^{-j\omega(v-t)} dv dt \quad v-t = \tau \quad dv = d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dt = \Phi_x(\omega) 2\pi \end{aligned}$$

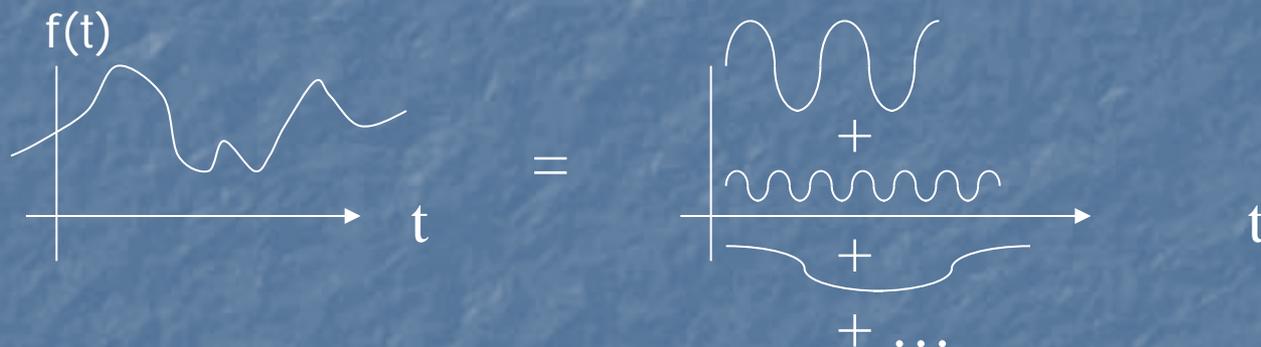
$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} E\{|X(\omega)|^2\}$$

Como la potencia asociada a una señal es proporcional al cuadrado de la misma, el espectro de potencia es proporcional a la potencia asociada a cada frecuencia

Energía de una señal

En general, la potencia asociada a una señal es proporcional al cuadrado de la misma.

$$I^2 R \quad \frac{1}{2} m v^2 \quad \dots$$



Si la amplitud de cada componente de frecuencia de la señal es $F(\omega)$, el principio de conservación de la energía lleva a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) d\omega$$

Igualdad de
Parseval

Espectro de potencia

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \begin{array}{l} \text{Transformada} \\ \text{inversa} \end{array} \Rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(\omega) d\omega$$

$$\Phi_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} E\{|X(\omega)|^2\}$$

Por ser una medida de la potencia de una señal:

$$\Phi_x(\omega) \geq 0$$

$$R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} = R_x(\tau) (\cos \omega\tau - j \operatorname{sen} \omega\tau)$$

Al integrar entre $-\infty$ e ∞ :

$$R_x(-\tau) \cos(-\omega\tau) = R_x(\tau) \cos(\omega\tau)$$

$$R_x(-\tau) \operatorname{sen}(-\omega\tau) = -R_x(\tau) \operatorname{sen}(\omega\tau)$$

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau$$

es una función real, también : $\Phi_x(\omega) = \Phi_x(-\omega)$

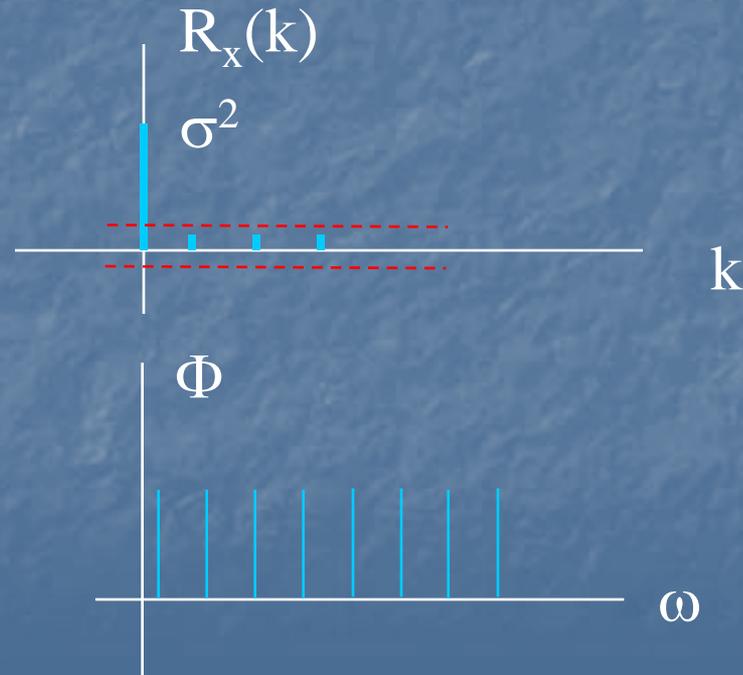
Ruido blanco

Señal aleatoria en la que sus valores en un instante t son independientes del valor que han tomado en instantes anteriores.

$$R_x(k) = 0 \quad k \neq 0$$

$$\Phi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = R_x(0) = \sigma_x^2$$

Su espectro de potencia es constante al igual que el de la luz blanca en que todas las frecuencias tienen igual peso



Espectro de potencia cruzado

Espectro de
potencia cruzado

$$\Phi_{uy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Como $R_{uy}(\tau)$ no es una función par, en general $\Phi_{uy}(\omega)$ será una función compleja de ω

$$\Phi_{uy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad v = -\tau \quad dv = -d\tau$$

$$\Phi_{uy}(\omega) = - \int_{\infty}^{-\infty} R_{yu}(v) e^{j\omega v} dv = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yu}(v) e^{j\omega v} dv = \Phi_{yu}^*(\omega) \quad \Phi_{uy}(\omega) = \Phi_{yu}^*(\omega)$$

También:

$$\Phi_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} E \left\{ U^*(\omega) Y(\omega) \right\}$$

Espectro de una serie temporal

En el caso de una serie temporal de periodo T , debe usarse la transformada de Fourier discreta

$$\Phi_x(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n) e^{-j\omega n T} \quad \Phi_{uy}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{uy}(n) e^{-j\omega n T}$$

Como el número de muestras es finito, debe hacerse una estimación

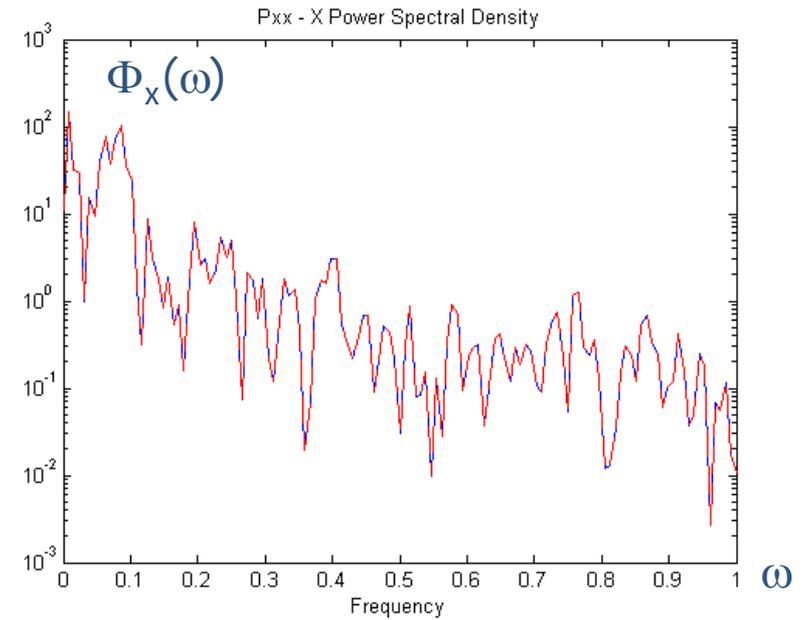
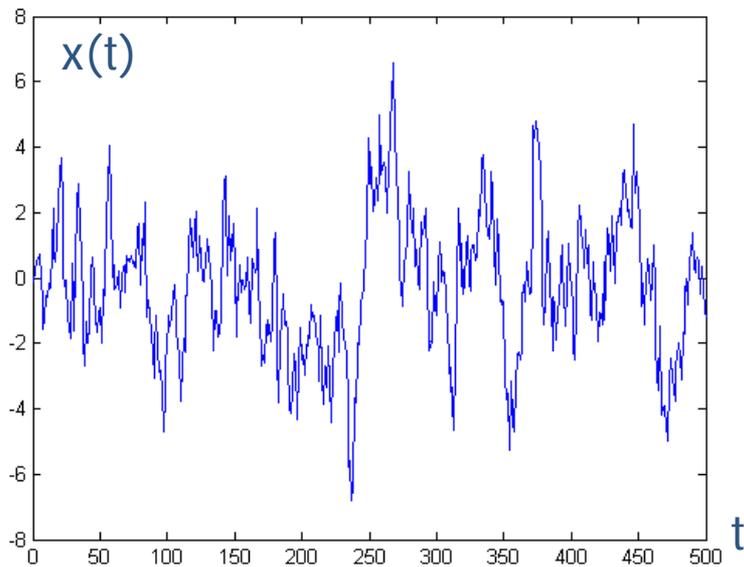
Periodograma:

$$\hat{\Phi}_x(k\omega_0) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} R_x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad R_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1-n} X_{t+n} X_t$$

Donde $X(k\omega_0)$ es la transformada discreta de Fourier de la serie temporal

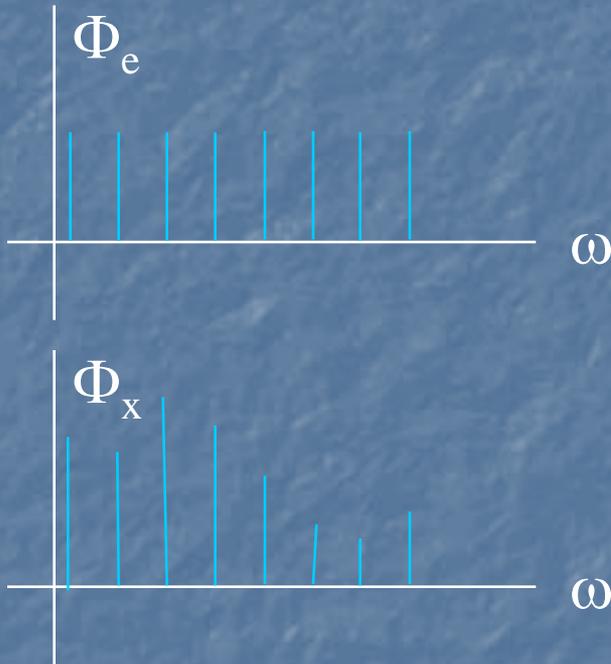
$$\hat{\Phi}_x(k\omega_0) = \frac{1}{N} |X(k\omega_0)|^2$$

Ejemplo



Función spectrum

Modelos ARMA



Un ruido blanco contiene todas las frecuencias con la misma amplitud

Una señal cualquiera se puede caracterizar por su espectro de potencia

Puede generarse una señal filtrando adecuadamente un ruido blanco



Modelos ARMA

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$

El proceso estocástico $x(t)$ se genera filtrando el ruido blanco $e(t)$ de media nula y varianza σ^2 con una función de transferencia C/D

ARMA AutoRegresive Moving Average

$$x(t) = -d_1 x(t-1) - d_2 x(t-2) - \dots - d_n x(t-n) + e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m)$$

Si $C(q^{-1}) = 1$ **proceso AR**
Autorregresivo

$$x(t) = -d_1 x(t-1) - d_2 x(t-2) - \dots - d_n x(t-n) + e(t)$$

Si $D(q^{-1}) = 1$ **proceso MA**
de media móvil

$$x(t) = e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_m e(t-m)$$

Procesos estacionarios

Un proceso estacionario es aquel que tiene media constante

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \Rightarrow E\{x(t)\} = E\left\{\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)\right\} = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} E\{e(t)\}$$

Dado que $E\{e(t)\}$ es cte.=0, la dinámica del valor esperado de $x(t)$ viene determinada por los polos del modelo ARMA

Si las raíces de $D(q) = 0$ están dentro del círculo unidad el proceso $x(t)$ será estacionario

Si alguna raíz de $D(q) = 0$ está sobre el círculo unidad, el proceso $x(t)$ será no estacionario y sus valores no estarán distribuidos en torno a un valor constante

Procesos con alguna raíz de $D(q) = 0$ fuera del círculo unidad, no son representativos de señales reales que no evolucionan a $\pm\infty$

Procesos no estacionarios

Estarán representados por un modelo **ARIMA** del tipo

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{(1-q^{-1})^\alpha D_1(q^{-1})} e(t)$$

Puede obtenerse un proceso ARMA a partir de uno ARIMA por diferenciación:

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{(1-q^{-1})D_1(q^{-1})} e(t) \quad s(t) = \Delta x(t) = (1-q^{-1})x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D_1(q^{-1})} e(t)$$

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{(1-q^{-1})^2 D_1(q^{-1})} e(t) \quad s(t) = \nabla^2 x(t) = (1-q^{-1})^2 x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D_1(q^{-1})} e(t)$$

¿Es $\{x(t)\}$ estacionario?

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad D(q^{-1})x(t) = C(q^{-1})e(t)$$

$$D(q^{-1})x(t)x(t+k) = C(q^{-1})e(t)x(t+k)$$

$$E\{D(q^{-1})x(t)x(t+k)\} = E\{C(q^{-1})e(t)x(t+k)\}$$

$$D(q^{-1})R_x(k) = C(q^{-1})R_{ex}(k)$$

$$x(t) = -d_1x(t-1) - d_2x(t-2) - \dots - d_nx(t-n) + e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_me(t-m)$$

$x(t)$ no depende de $e(t-m-j)$ para $j > 0$, luego $R_{ex}(k) = 0$ para $k > m$

Ecuación de Yule-Walker

$$D(q^{-1})R_x(k) = 0 \quad k > m$$

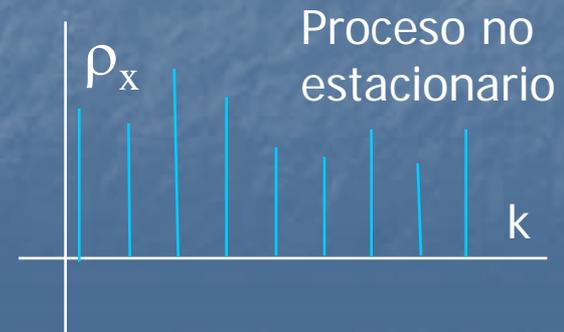
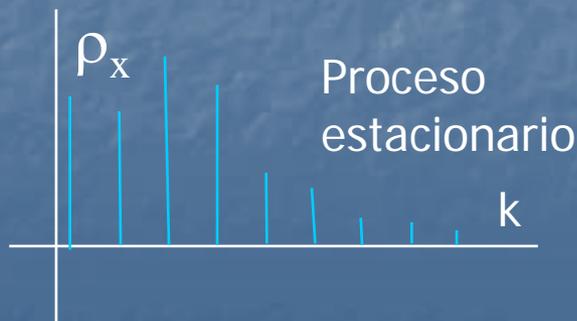
¿Es $\{x(t)\}$ estacionario?

$$x(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$

Si el proceso ARMA es estacionario, entonces las raíces de $D(q) = 0$ están dentro del círculo unidad

$$D(q^{-1})R_x(k) = 0 \quad k > m \quad R_x(k) = \frac{1}{D(q^{-1})} 0 \Rightarrow R_x(k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

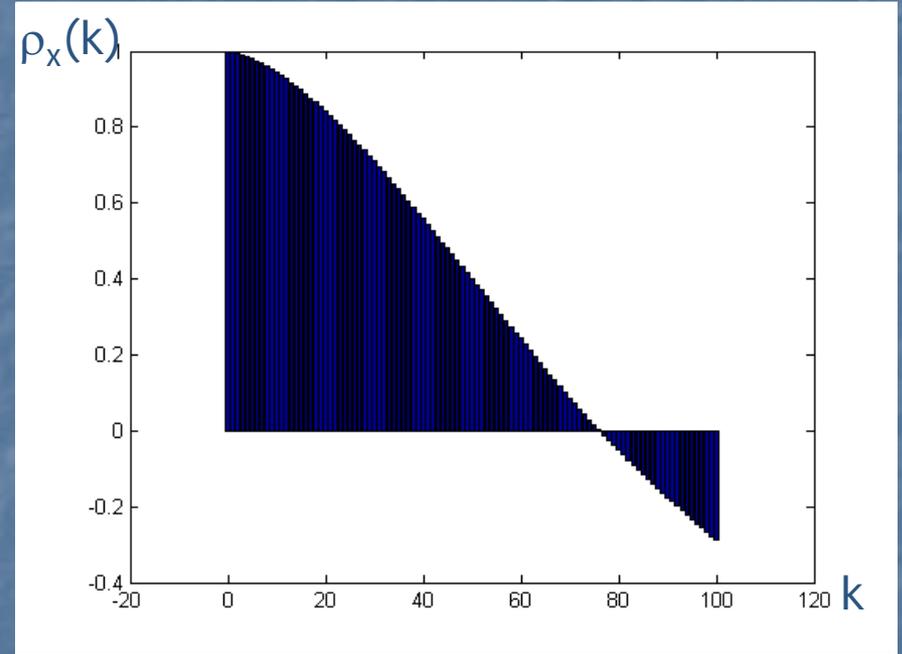
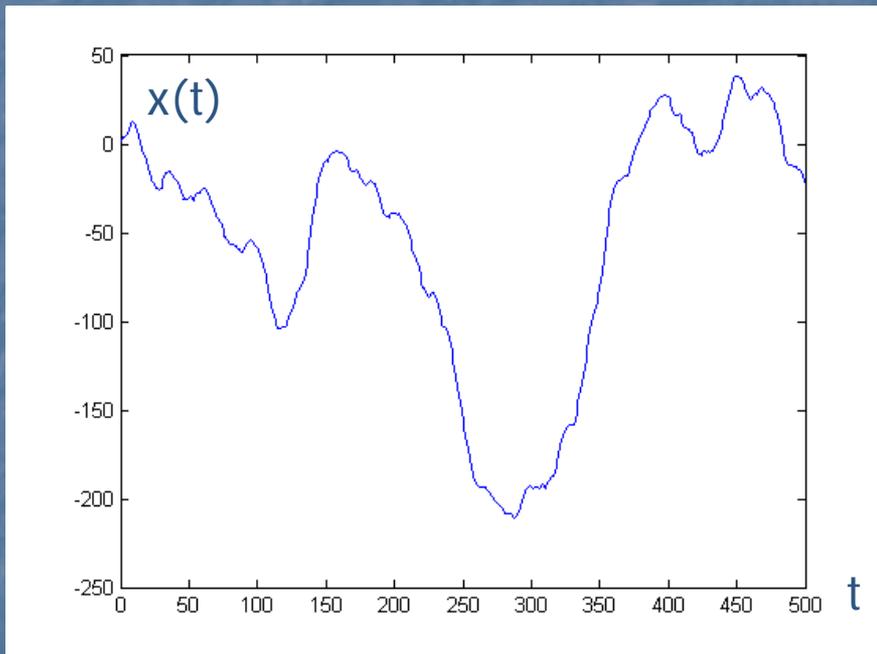
Si el proceso es estacionario, a partir de un k , el coeficiente de autocorrelación tenderá a cero. Si no lo es, presentará una componente oscilatoria que no se anulará con k crecientes.



Ejemplo

$$x(t) = \frac{1}{(1 - q^{-1})(1 - 0.9q^{-1})} \xi(t)$$

Proceso no estacionario



Identificación de procesos AR

Si un proceso es Autoregresivo (AR) entonces $C(q^{-1}) = 1$ y por la ecuación de Yule-Walker se verifica:

$$x(t) = \frac{1}{D(q^{-1})} e(t)$$

$$D(q^{-1})\rho_x(k) = 0 \quad k > 0$$

$$\rho_x(k) = -d_1\rho_x(k-1) - d_2\rho_x(k-2) - \dots - d_n\rho_x(k-n) \quad k > 0$$

Funciones de correlación parcial

Si n fuera igual a 1 se cumpliría: $\rho_x(1) = -d_{11}\rho_x(0) = -d_{11} \Rightarrow d_{11} = \rho_x(1)$

Si n fuera igual a 2 se cumpliría:

$$\left. \begin{aligned} \rho_x(1) &= -d_{12}\rho_x(0) - d_{22}\rho_x(-1) = -d_{12} - d_{22}\rho_x(1) \\ \rho_x(2) &= -d_{12}\rho_x(1) - d_{22}\rho_x(0) = -d_{12}\rho_x(1) - d_{22} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d_{12} &= \frac{-\rho_x(1)(1-\rho_x(2))}{1-\rho_x(1)^2} \\ d_{22} &= \frac{-\rho_x(2) + \rho_x(1)^2}{1-\rho_x(1)^2} \end{aligned}$$

Función de autocorrelación parcial d_{jj}

Del mismo modo si $n=3$ se obtendrían d_{13} , d_{23} , d_{33}

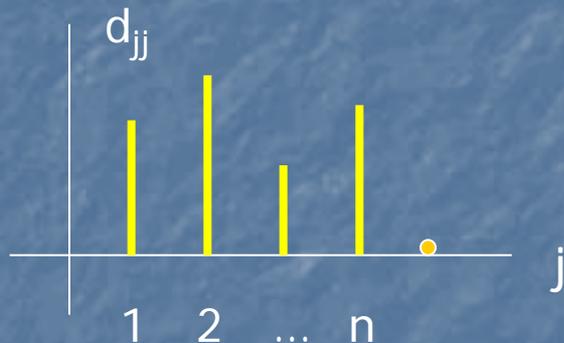
En general para $n=j$ los términos d_{ij} pueden obtenerse mediante el **algoritmo de Levinson-Durbin**:

$$d_{j+1,j+1} = -\frac{\rho_x(j+1) + \sum_{i=1}^j d_{i,j} \rho_x(j+1-i)}{1 + \sum_{i=1}^j d_{i,j} \rho_x(i)} \quad d_{i,j+1} = d_{i,j} + d_{j+1,j+1} d_{j+1-i,j} \quad i = 1, 2, \dots, j$$



La función de autocorrelación parcial es una representación de los términos d_{jj} en función de j

Función de autocorrelación parcial d_{jj}



Si un proceso AR es de orden n , su función de autocorrelación parcial presentará valores distintos de cero hasta $j=n$ y un corte brusco a partir de este valor, pues $d_{n+1,n+1}$ será cero

$$\rho_x(k) = -d_{1n}\rho_x(k-1) - d_{2n}\rho_x(k-2) - \dots - d_{nn}\rho_x(k-n) \quad k > 0$$

Identificación:

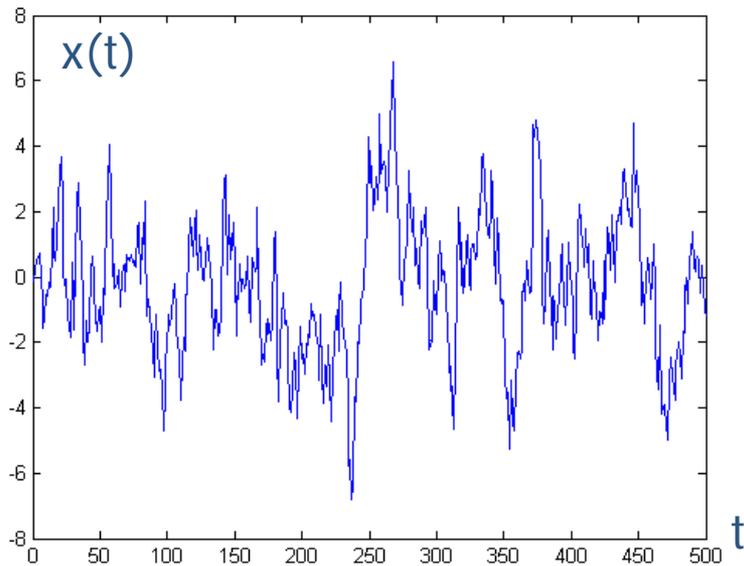
A partir de los coeficientes de autocorrelación, puede calcularse la función de correlación parcial d_{jj} y estimar a partir de ella el valor de n .

El algoritmo de Levinson-Durbin nos proporciona luego los valores de los coeficientes d_{in} del modelo AR del proceso

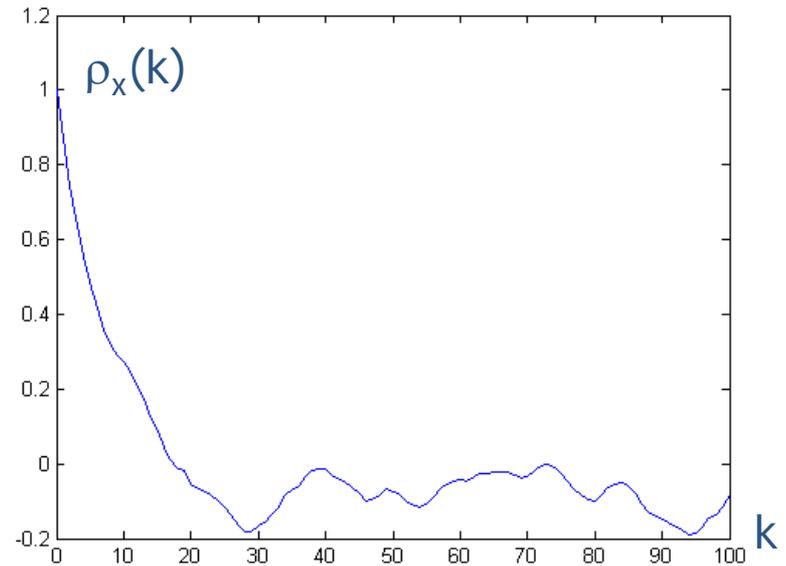
Ejemplo

$$x(t) = \frac{1}{1 - 0.9q^{-1}} \xi(t)$$

Proceso estacionario AR



Señal $x(t)$

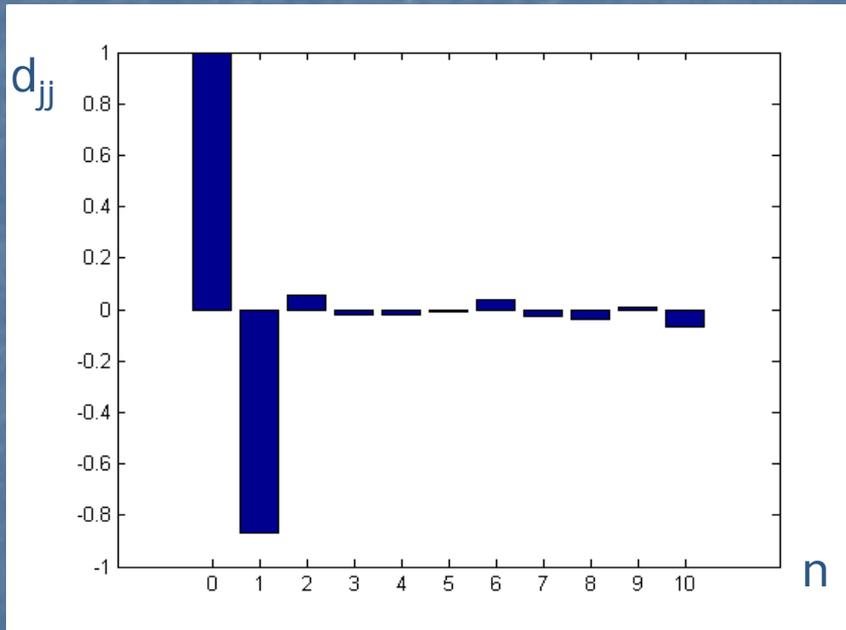


Coefficiente de autocorrelación de $x(t)$

Ejemplo

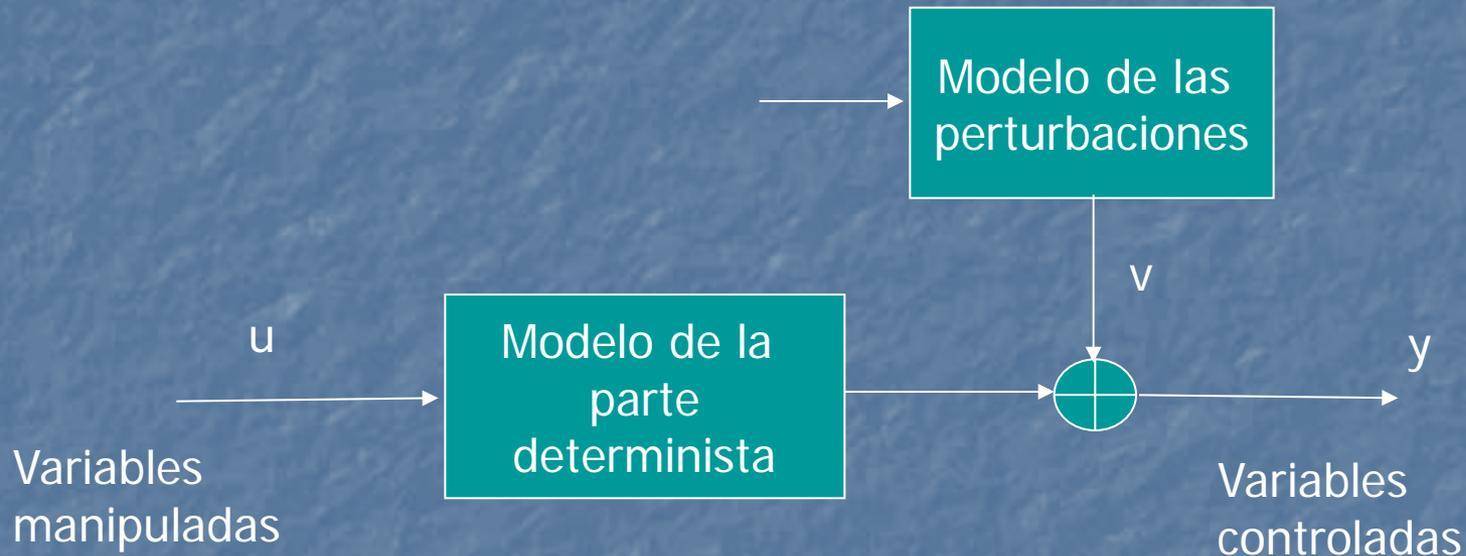
$$x(t) = \frac{1}{1 - 0.9q^{-1}} \xi(t)$$

Proceso estacionario AR



La función de autocorrelación parcial d_{jj} presenta un salto brusco a partir de $n=1$, luego el proceso podría modelarse por como un proceso AR con $n=1$. Además $d_{11} = -0.87$

Modelos de procesos



$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)u(t-j) + v(t)$$

Modelos Box-Jenkins

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \xi(t) \quad \xi(t) \text{ ruido blanco de media nula}$$

Modelo CARMA o ARMAX Controlled ARMA, ARMA con variable exógena

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} \xi(t) \quad \xi(t) \text{ ruido blanco de media nula}$$

Modelo CARIMA Controlled ARIMA perturbación no estacionaria

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{C(q^{-1})}{(1-q^{-1})} \xi(t) \quad \xi(t) \text{ ruido blanco de media nula}$$

DRBS

Los ruidos blancos tienen un papel muy importante en el análisis y modelado de los procesos estocásticos. Pero no son fáciles de generar. A menudo se utilizan señales que son aproximaciones de ruidos blancos y que tienen características estadísticas similares.

DRBS Discrete Random Binary Signal

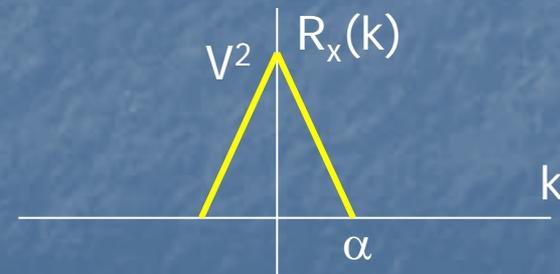
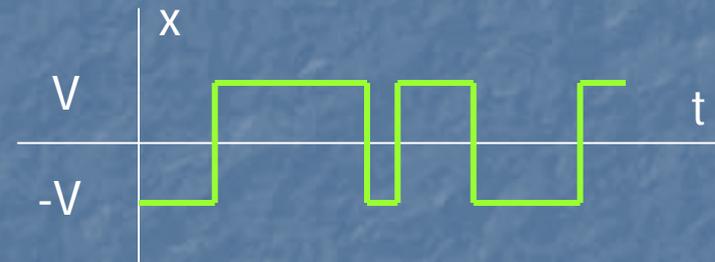
Señal que conmuta entre dos valores con una determinada probabilidad

1 Dar valores $0 < \alpha < 1$, $x = V$,

2 $r = \text{random}$ uniformemente distribuido en $[0, 1]$

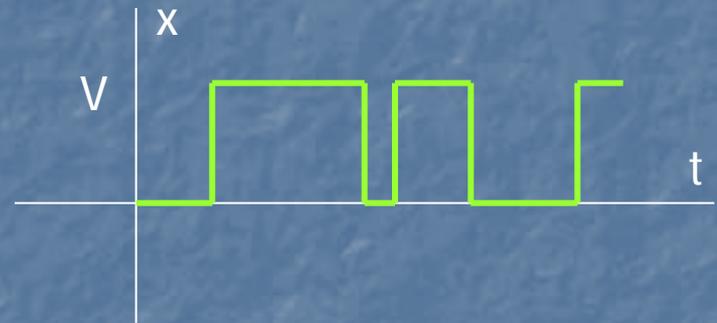
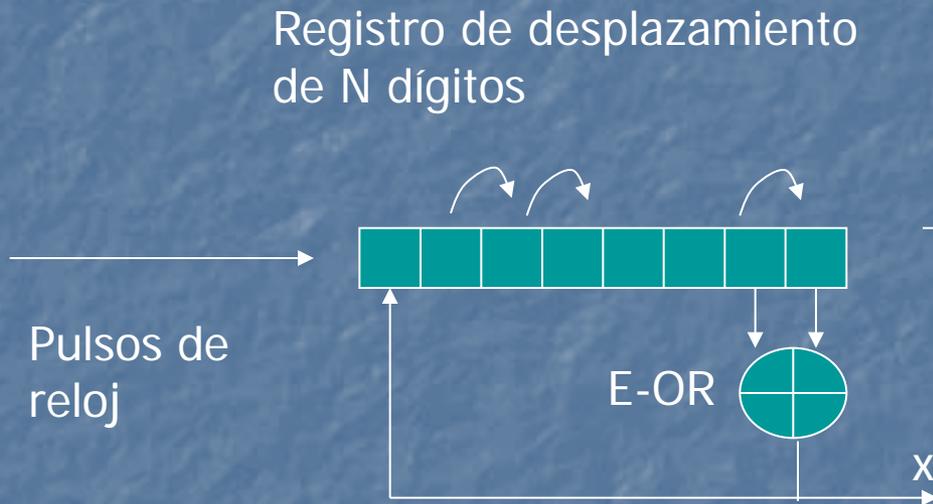
3 Si $(r > \alpha)$ entonces $x = -x$

4 volver a 2



PRBS

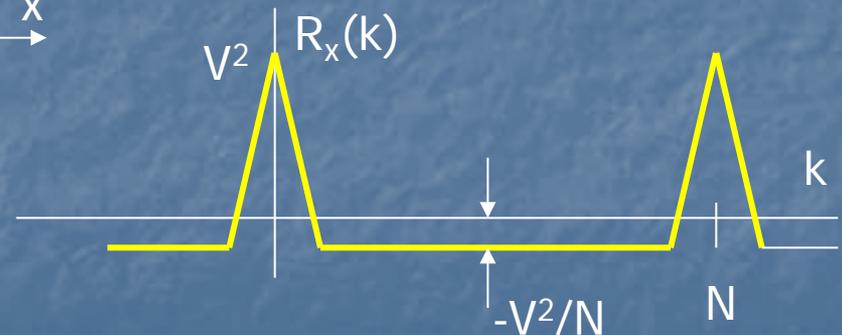
PRBS Pseudo Random Binary Signal



Exclusive OR

$$1 \oplus 1 = 0 \quad 0 \oplus 0 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 1 \quad 0 \oplus 1 = 1$$



La secuencia se repite cada $2^N - 1$ valores

α