



Procesos Multivariables

Prof. Cesar de Prada

ISA-UVA

prada@autom.uva.es



Outline

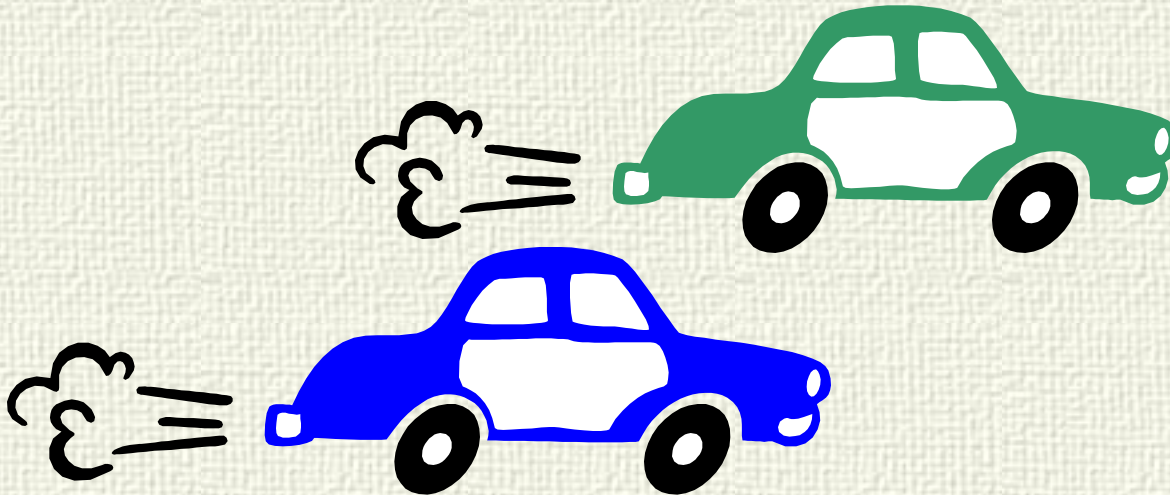
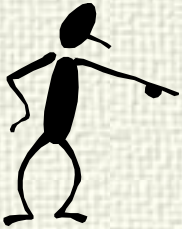
- ✓ Interacción
- ✓ Control de procesos multivariables usando lazos de control simples
- ✓ RGA
- ✓ Emparejamiento de lazos
- ✓ Control por desacoplo

Interacción

Un ejemplo

Estos coches

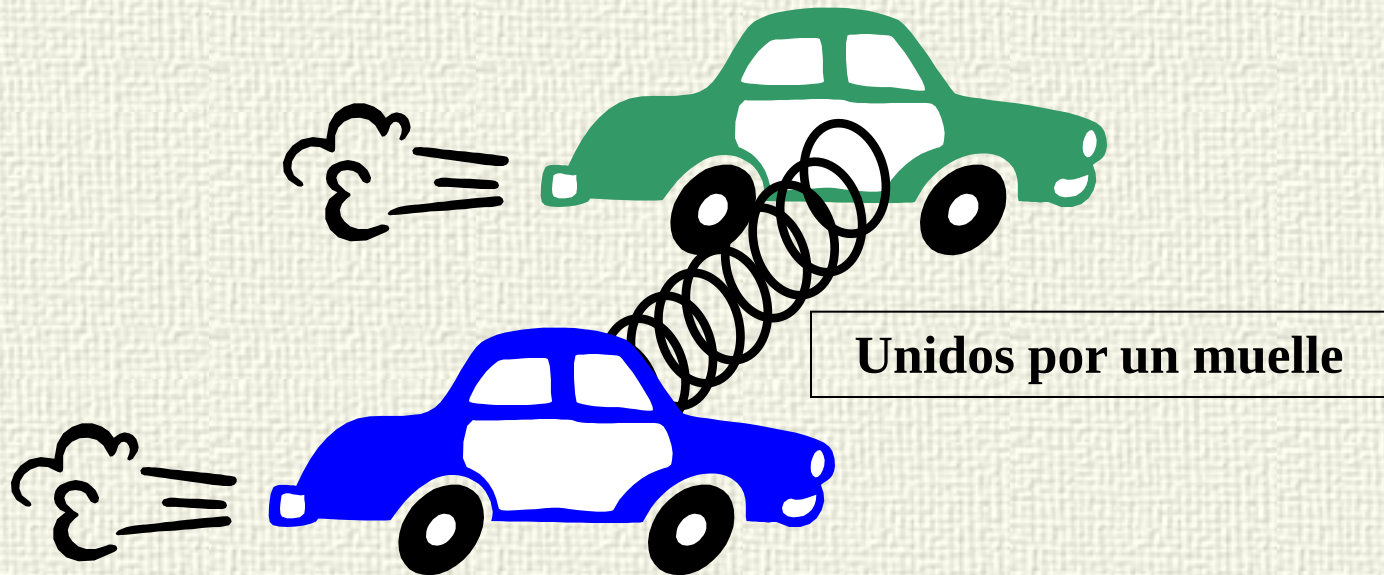
- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?



Interacción

Estos coches

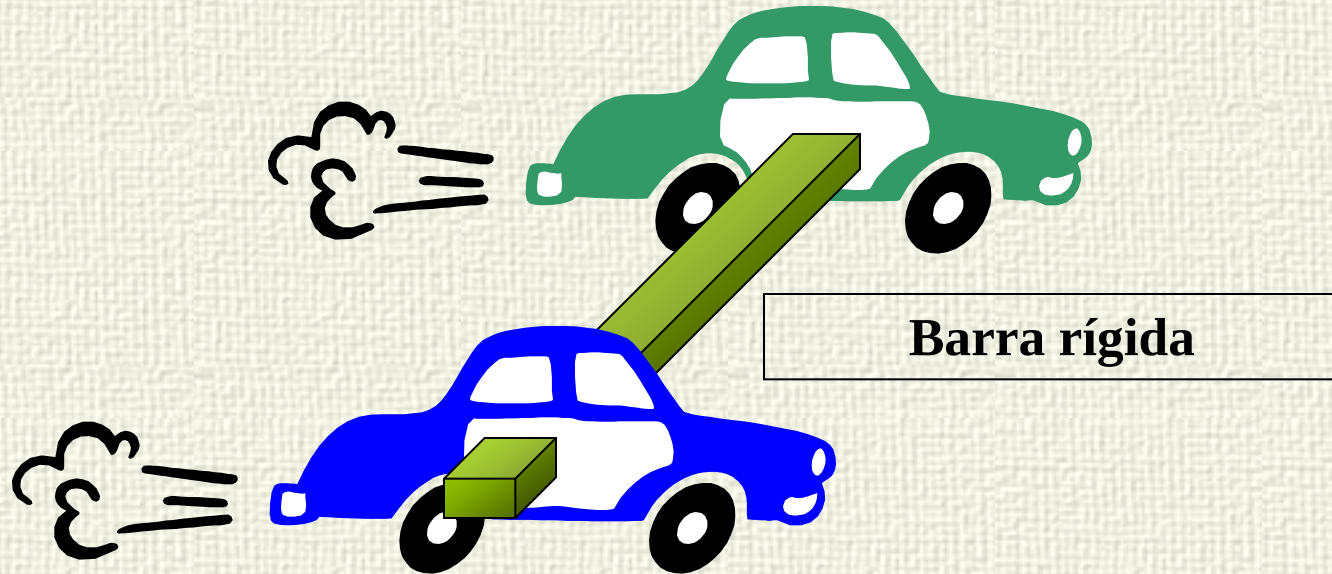
- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?



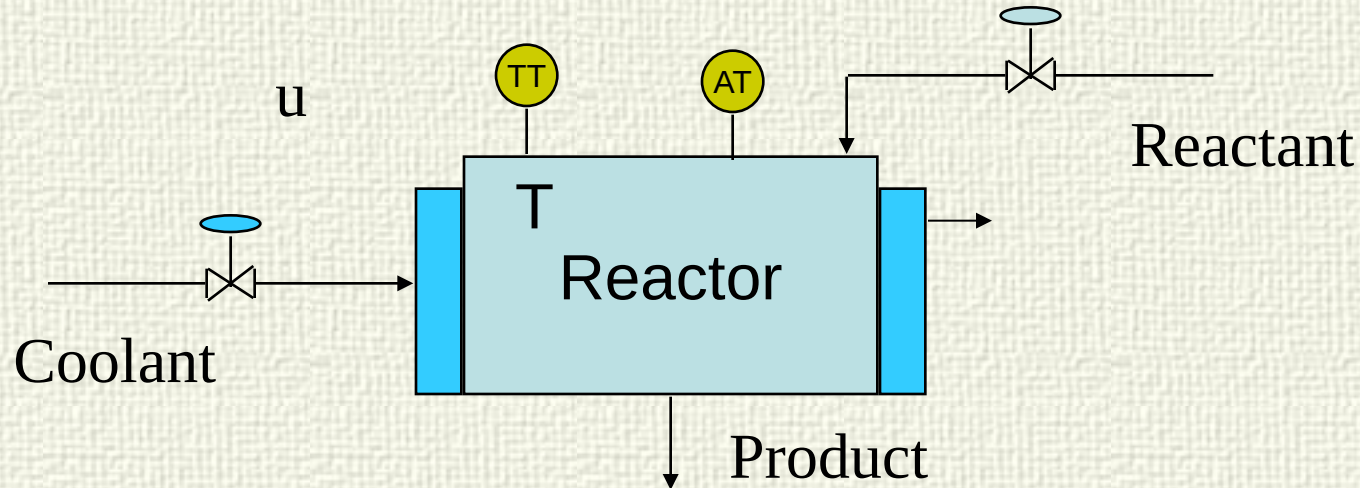
Interacción

Estos coches

- ¿Se pueden controlar independientemente?
- ¿Existe interacción entre ellos?



Reactor



Interacción entrada / salida entre ambas variables

Interacción en lazo abierto / No necesariamente igual a la interacción en lazo cerrado



Sistemas MIMO (Multi Input Multi Output)



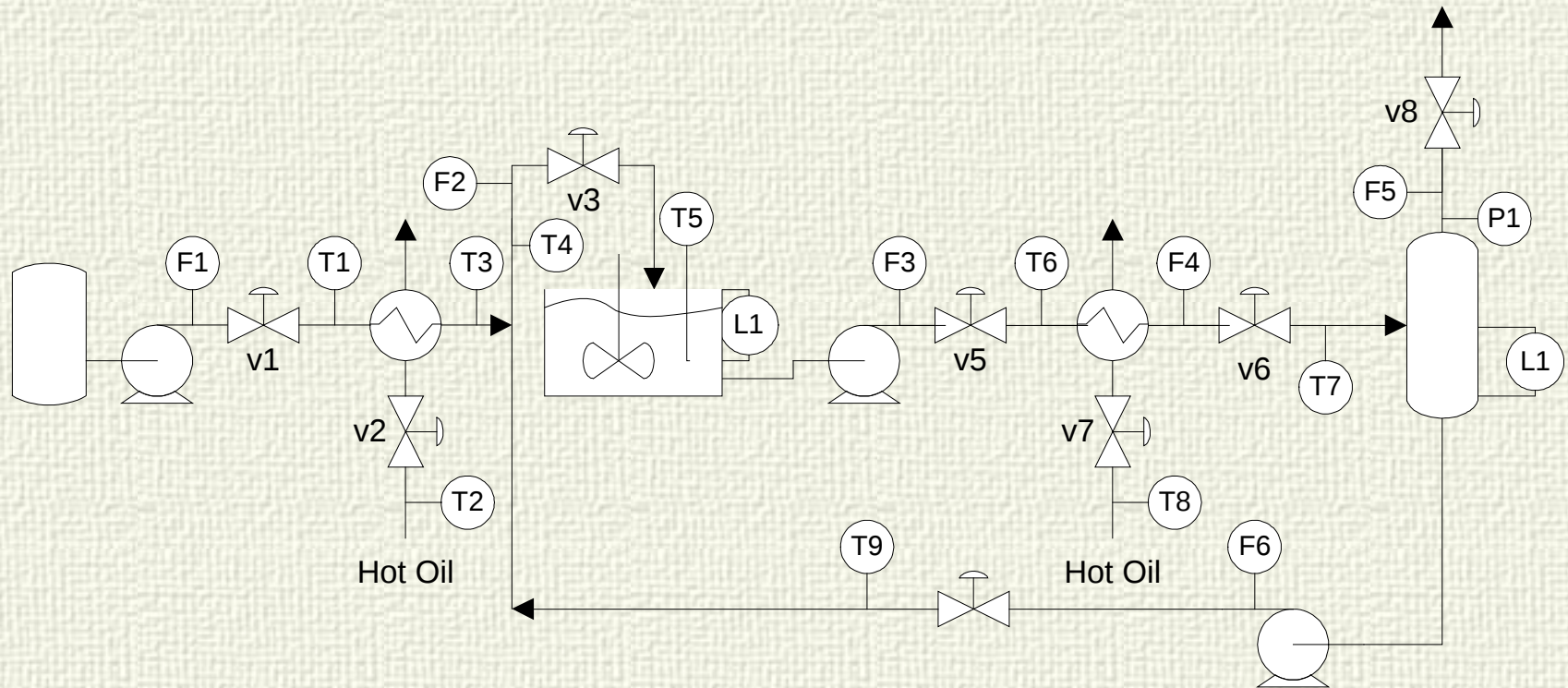
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Interacción

Direcciones de ganancia

¿Como determinar el número de variables que se pueden controlar en un proceso?

¿Como formar lazos de control?





Un requisito básico :

The diagram illustrates a chemical process involving several unit operations and control points:

- Tanks:** There are 9 tanks in total. Tank 1 is a storage tank on the left. Tank 2 is a stirred reactor in the center. Tank 3 is a storage tank on the right. Tank 4 is a storage tank at the bottom right. Tank 5 is a storage tank at the top right. Tank 6 is a storage tank at the bottom left. Tank 7 is a storage tank at the top left. Tank 8 is a storage tank at the bottom center. Tank 9 is a storage tank at the top center.
- Pumps:** There are 8 pumps labeled F1 through F8, distributed throughout the process.
- Control Valves:** There are 8 control valves labeled v1 through v8, used to regulate flow.
- Control Points:** There are 18 control points in total, categorized as follows:
 - Flow (F):** F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8
 - Temperature (T):** T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8, T9
 - Pressure (P):** P1
 - Level (L):** L1, L2
- Other Components:** The process includes a "Hot Oil" heating system, a "Stirred Reactor" (Tank 2), and a "Distillation Column" (Tank 3).

Prof. Cesar de Prada ISA-UVA



CONTROLABILIDAD

Se dice que un proceso es controlable, si las variables controladas pueden mantenerse en estado estacionario en sus valores de consigna, a pesar de las perturbaciones que puedan afectar al proceso.

Modelo de un proceso 2x2

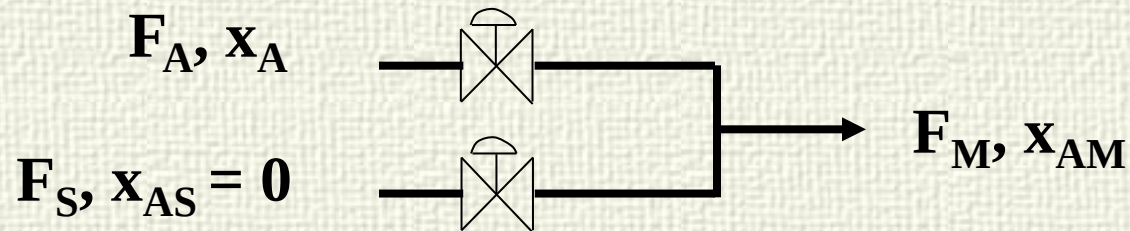
$$\begin{bmatrix} CV_1 \\ CV_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MV_1 \\ MV_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{d1} \\ K_{d2} \end{bmatrix} D$$

Matemáticamente, un proceso es controlable si la matriz de ganancia del mismo puede invertirse, esto es, si su determinante $K \neq 0$.

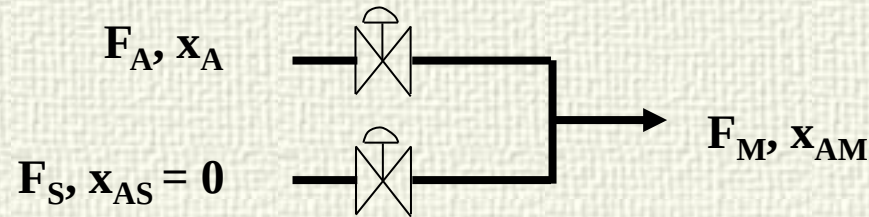
Controlabilidad

En el proceso de mezclado

- Son controlables de forma independiente F_M , x_{AM} ?
- Existe interacción en el proceso?



$$F_M = F_A + F_S \Rightarrow \Delta F_M = \Delta F_A + \Delta F_S$$
$$x_{AM} = \frac{F_A x_A}{F_A + F_S} \Rightarrow \Delta x_{AM} = \left[\frac{(1 - x_A) F_A}{(F_S + F_A)^2} \right]_{ss} \Delta F_A + \left[\frac{-F_A x_A}{(F_S + F_A)^2} \right]_{ss} \Delta F_S$$



$$\begin{bmatrix} \Delta F_M \\ \Delta x_{AM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(1-x_A)F_A}{(F_S + F_A)^2} \end{bmatrix}_{ss} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-F_A x_A}{(F_S + F_A)^2} \end{bmatrix}_{ss} \begin{bmatrix} \Delta F_A \\ \Delta F_S \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(K) = \frac{-F_A x_A}{(F_A + F_S)^2} - \frac{F_A (1-x_A)}{(F_A + F_S)^2} = \frac{-F_A}{(F_A + F_S)^2} \neq 0$$

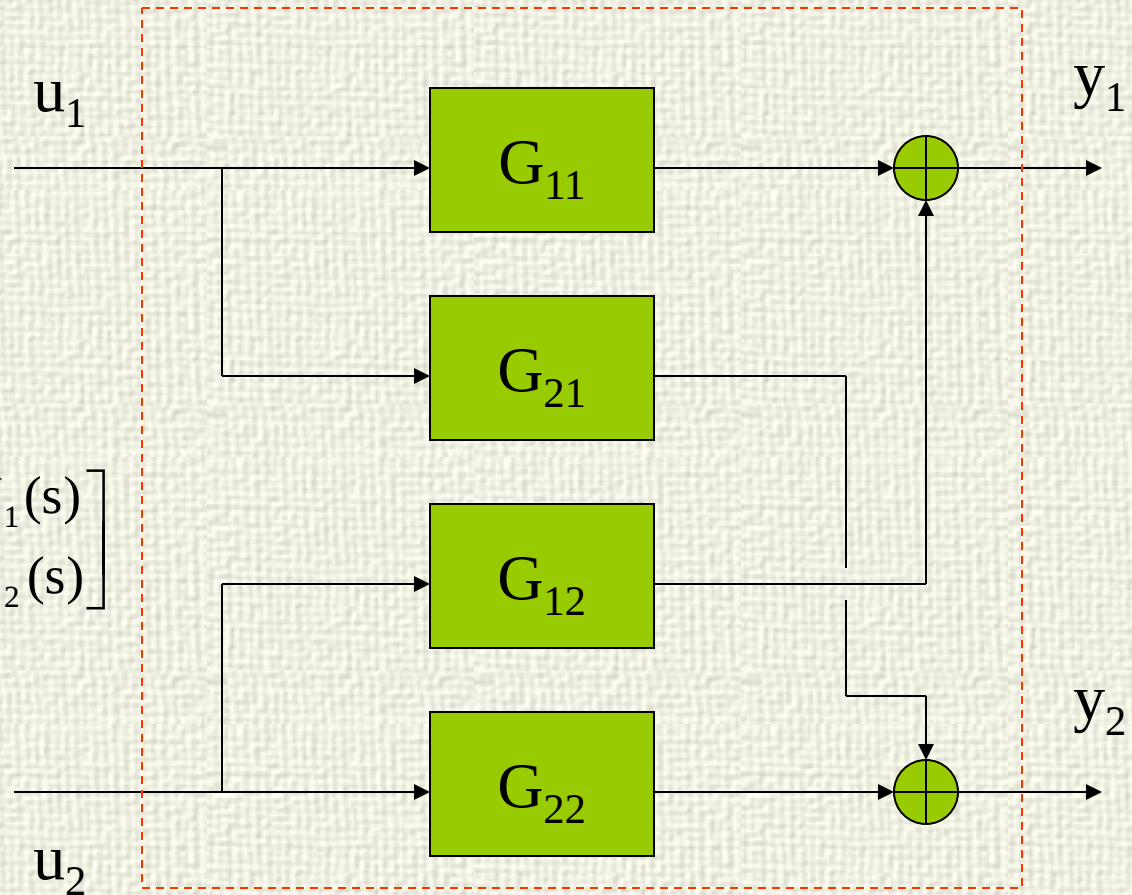
Sí, este sistema es controlable!

¿Sería controlable el sistema si x_{AS} es distinto de cero?

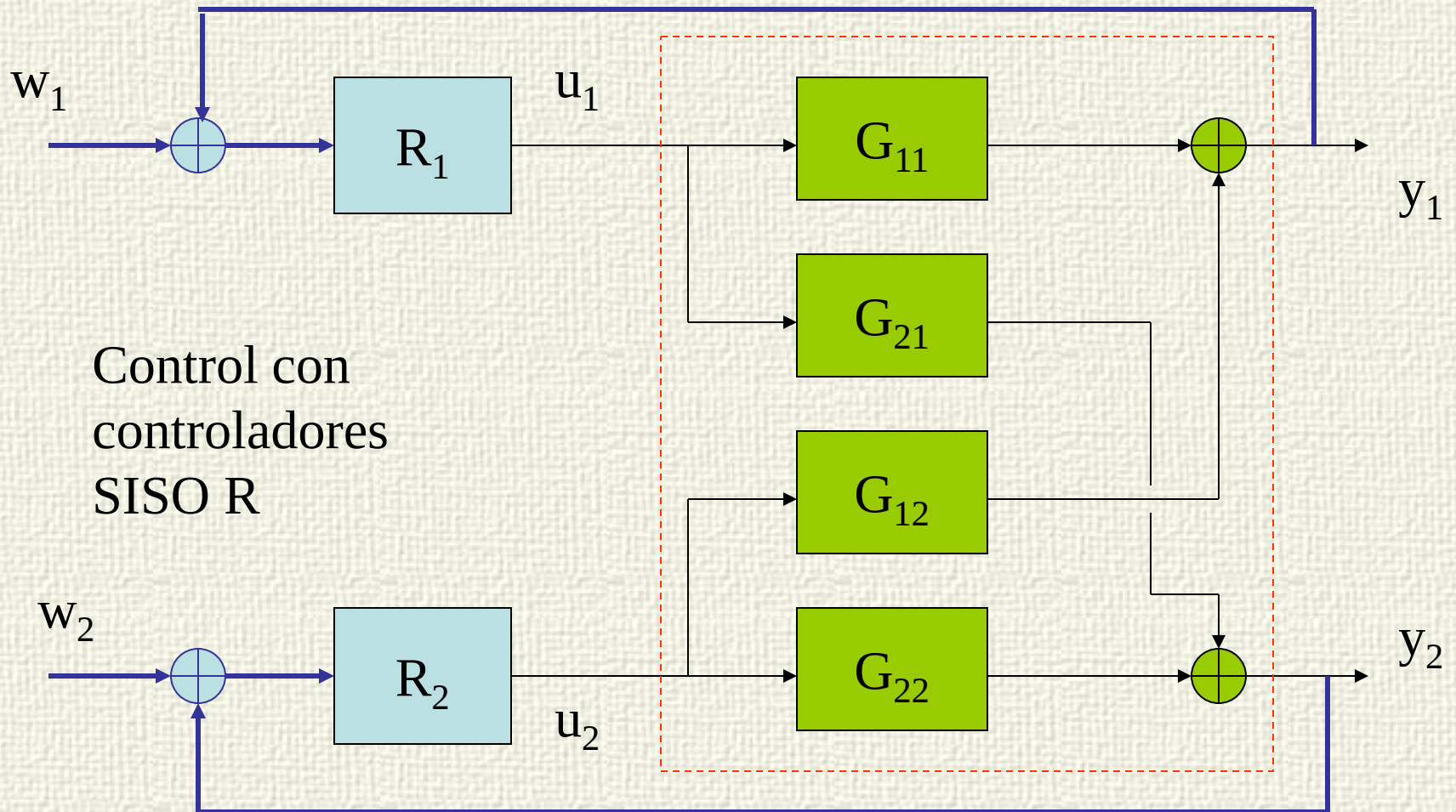
Interacción

Lazo abierto

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$



Interacción



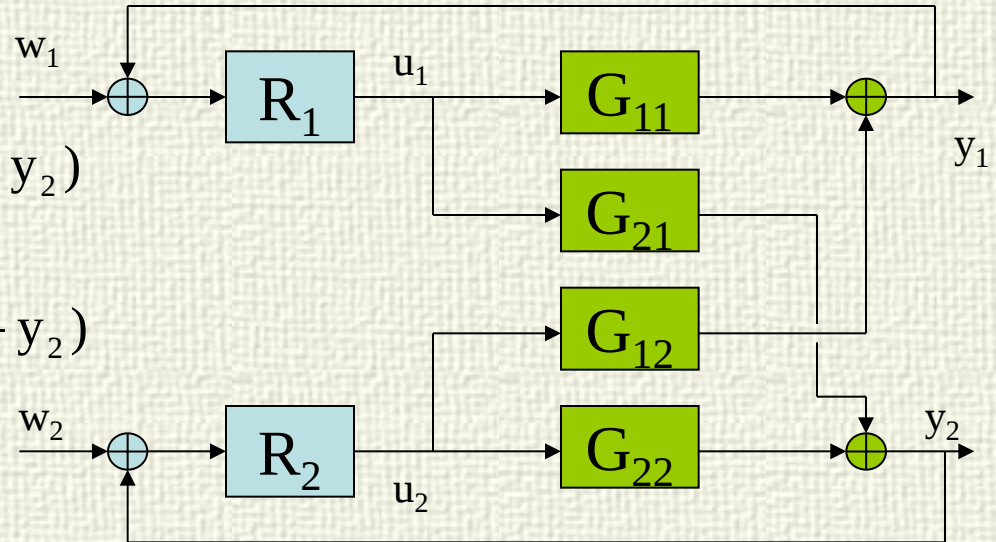
Lazo cerrado

$$y_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 =$$

$$= G_{11}R_1(w_1 - y_1) + G_{12}R_2(w_2 - y_2)$$

$$y_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 =$$

$$= G_{21}R_1(w_1 - y_1) + G_{22}R_2(w_2 - y_2)$$



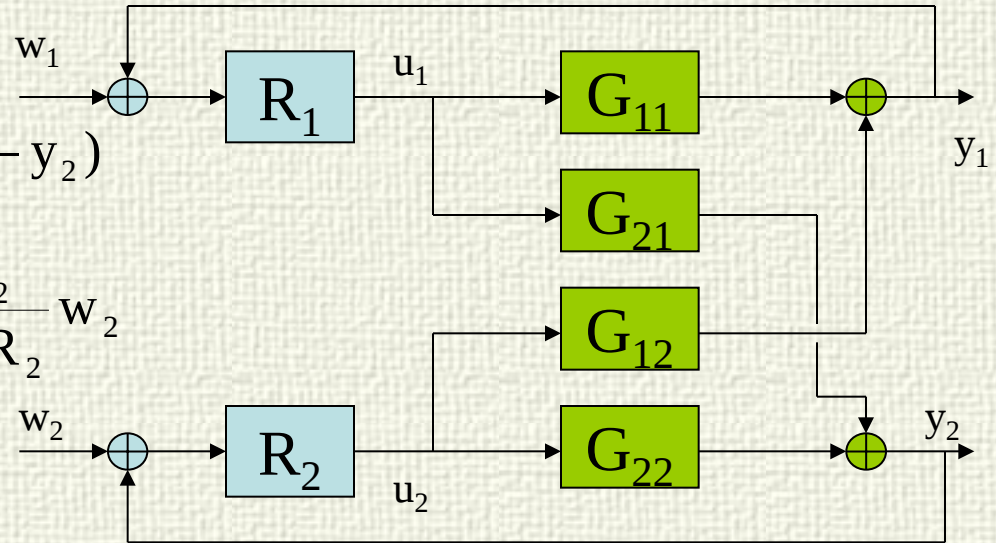
$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1 + G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1 + G_{11}R_1} (w_2 - y_2)$$

$$y_2 = \frac{G_{21}R_1}{1 + G_{22}R_2} (w_1 - y_1) + \frac{G_{22}R_2}{1 + G_{22}R_2} w_2$$

Interacción

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1} (w_2 - y_2)$$

$$y_2 = \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2} (w_1 - y_1) + \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2$$



$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{1+G_{11}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{1+G_{11}R_1} \left(w_2 - \frac{G_{21}R_1}{1+G_{22}R_2} (w_1 - y_1) - \frac{G_{22}R_2}{1+G_{22}R_2} w_2 \right)$$

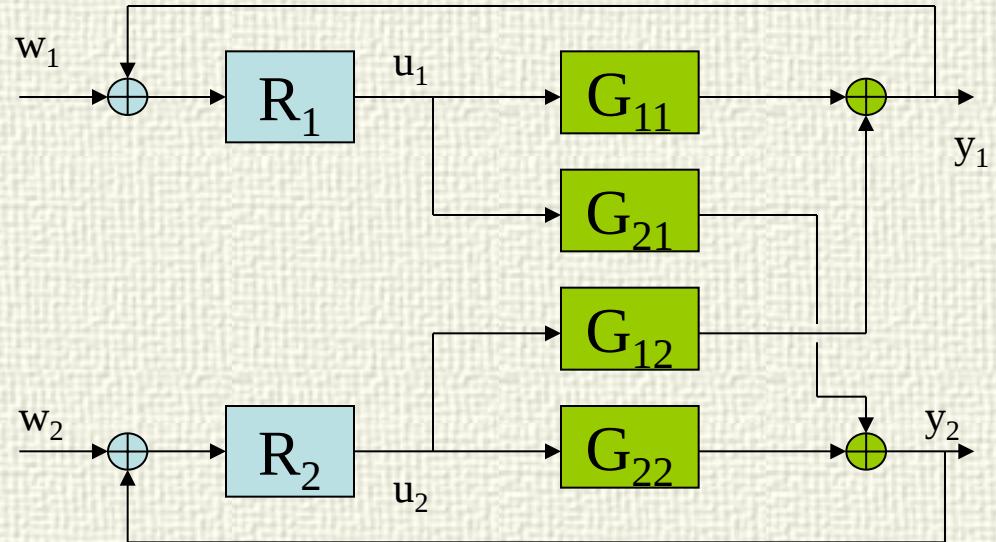
$$y_1 = \frac{G_{11}R_1(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2) - G_{12}R_2G_{21}R_1} w_2$$

Interacción (Lazo 1)

w_1 y w_2 influyen en y_1

Si G_{12} ó G_{21} son $= 0$ no hay cambio de dinámica sobre un sistema SISO $u_1 \rightarrow y_1$

Si R_2 pasa a manual se modifica la dinámica del lazo 1

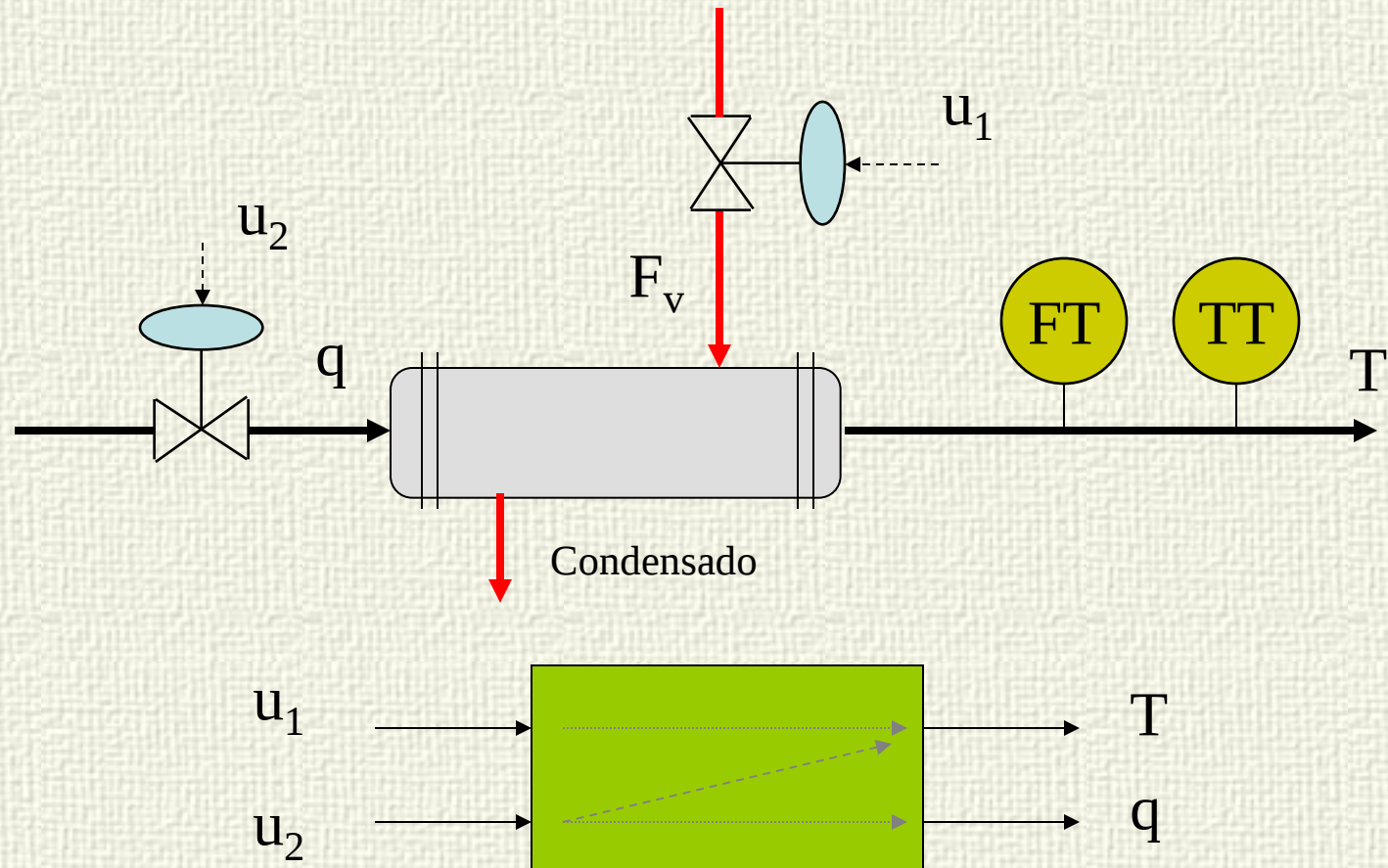


$$y_1 = \frac{G_{11}R_1(1+G_{22}R_2)-G_{12}R_2G_{21}R_1}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2)-G_{12}R_2G_{21}R_1} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2)-G_{12}R_2G_{21}R_1} w_2$$

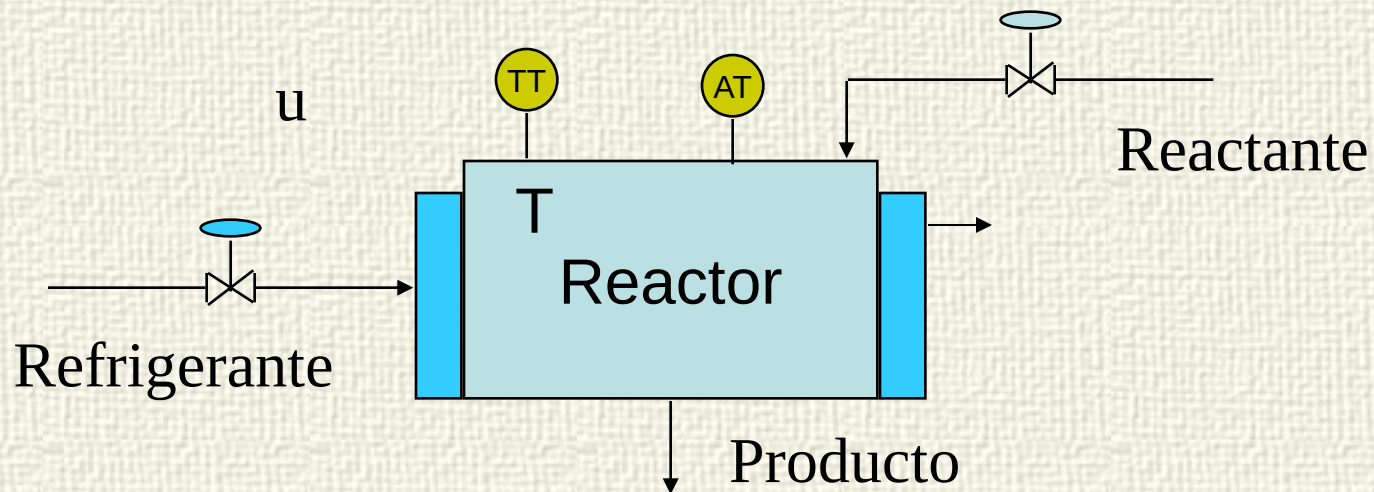
$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{(1+G_{11}R_1)} w_1 + \frac{G_{12}R_2}{(1+G_{11}R_1)(1+G_{22}R_2)} w_2$$

$$y_1 = \frac{G_{11}R_1}{(1+G_{11}R_1)} w_1$$

Interacción



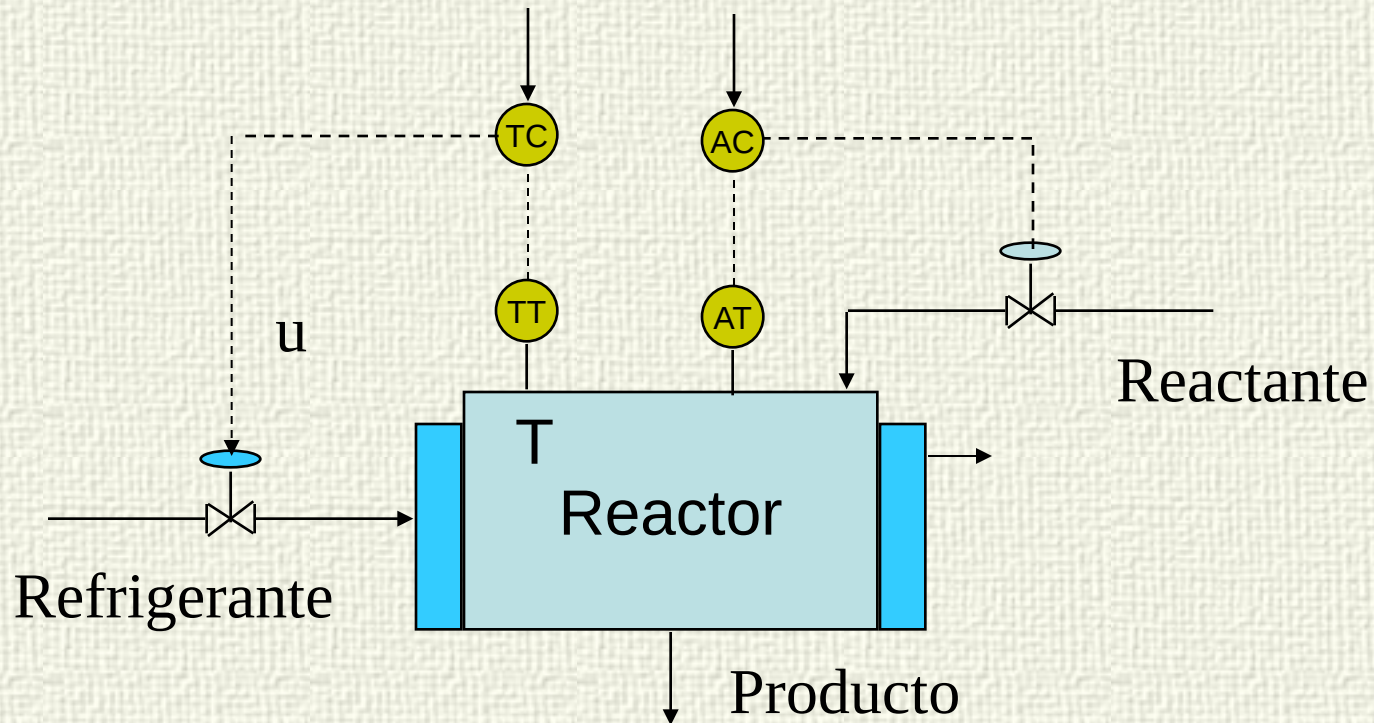
Reactor



Interacción entrada salida en ambas variables

Interacción en lazo abierto

Reactor

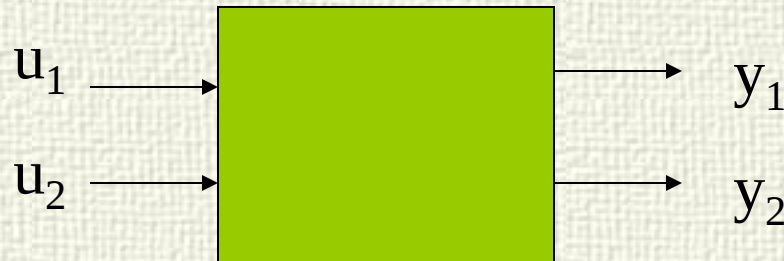


Interacción entrada salida en ambas variables

Interacción en lazo cerrado

Interacción

- ✓ Medir el grado de interacción
- ✓ ¿Se puede funcionar con lazos simples?
- ✓ En caso afirmativo, ¿Cual es el mejor emparejamiento de variables entrada-salida?





Matriz de ganancias estacionarias

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

No es una buena medida de interacción:

Depende de las unidades en las que se exprese

No refleja el hecho característico de la interacción multivariable: los cambios en un lazo cuando otros pasan de automático a manual



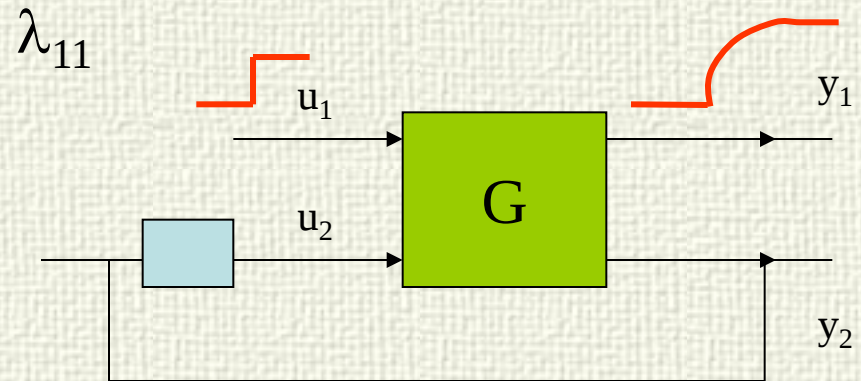
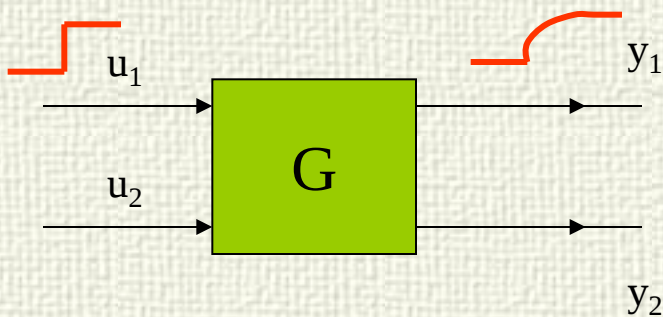
Matriz de Ganancias Relativas (RGA) Matriz de Bristol



	u_1	u_2
y_1	λ_{11}	λ_{12}
y_2	λ_{21}	λ_{22}

$$\lambda_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_k = \text{cte}; \forall k \neq j}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y_m = \text{cte}; \forall m \neq i}}$$

λ_{11} mide el cambio de ganancia entre u_1 e y_1 en los experimentos:



RG

Puede emplearse para hacer una adecuada selección de pares entrada-salida para controlar un sistema MIMO escogiendo la mínima interacción en estado estacionario o a una frecuencia dada

$$\lambda_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u=\text{cte}}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y=\text{cte}}}$$

$$\lambda_{i,j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Deseable}$$

$$\lambda_{i,j} = 0$$

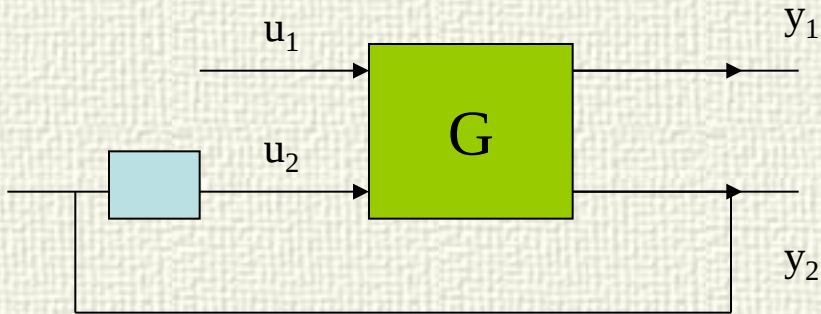
$$\lambda_{i,j} = \infty$$

$$\lambda_{i,j} < 0$$

	u_1	u_2
y_1	0.2	0.8
y_2	0.8	0.2

$$\quad \Rightarrow \quad \text{Inestabilidad}$$

RG



$$\lambda_{11}$$

$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 + k_{12}\Delta u_2$$

$$\Delta y_2 = 0 = k_{21}\Delta u_1 + k_{22}\Delta u_2$$

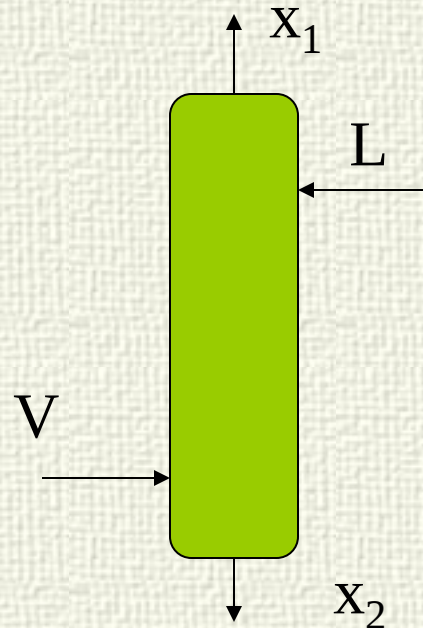
$$\Delta y_1 = k_{11}\Delta u_1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{22}}\Delta u_1$$

$$\left. \frac{\Delta y_1}{\Delta u_1} \right|_{y_2=\text{cte}} = \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{k_{22}}$$

$$\lambda_{11} = \frac{k_{11}}{\frac{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}{k_{22}}} = \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$$

	u_1	u_2
y_1	$\frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$	$\frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$
y_2	$\frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$	$\frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}}$

Columna



$$G(0) = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix} \begin{matrix} \% \\ \% \end{matrix}$$

$$\text{RGA} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} L & V \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 9,9 & -8,9 \\ -8,9 & 9,9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Muy fuerte interacción con el emparejamiento (L x₁) (V x₂)

Inestabilidad asegurada con el emparejamiento (L x₂) (V x₁)



RGa

$$\text{RGa}(G) = \Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

La suma de los elementos de una fila o columna de la RGa es 1

Es independiente del escalado de u e y

Para procesos asimétricos, la inversa puede sustituirse por la pseudoinversa

Matlab $\text{RGa} = G.*\text{pinv}(G)'$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{pinv}(G) = \begin{bmatrix} 0.46 & -0.35 \\ -0.02 & 0.26 \\ 0.14 & -0.08 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(G) = G \times (G^{-1})^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0.91 & -0.05 & 0.14 \\ 0 & 1.04 & -0.04 \end{bmatrix}$$

y_1 debe emparejarse con u_1

y_2 debe emparejarse con u_2



RGAs

$$G = \begin{bmatrix} 16.8 & 30.5 & 4.3 \\ -16.7 & 31.0 & -1.41 \\ 1.27 & 54.1 & 5.40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 \\ y_1 & \begin{bmatrix} 1.50 & 0.99 & -1.48 \end{bmatrix} \\ y_2 & \begin{bmatrix} -0.41 & 0.97 & 0.45 \end{bmatrix} \\ y_3 & \begin{bmatrix} -0.08 & -0.95 & 2.03 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

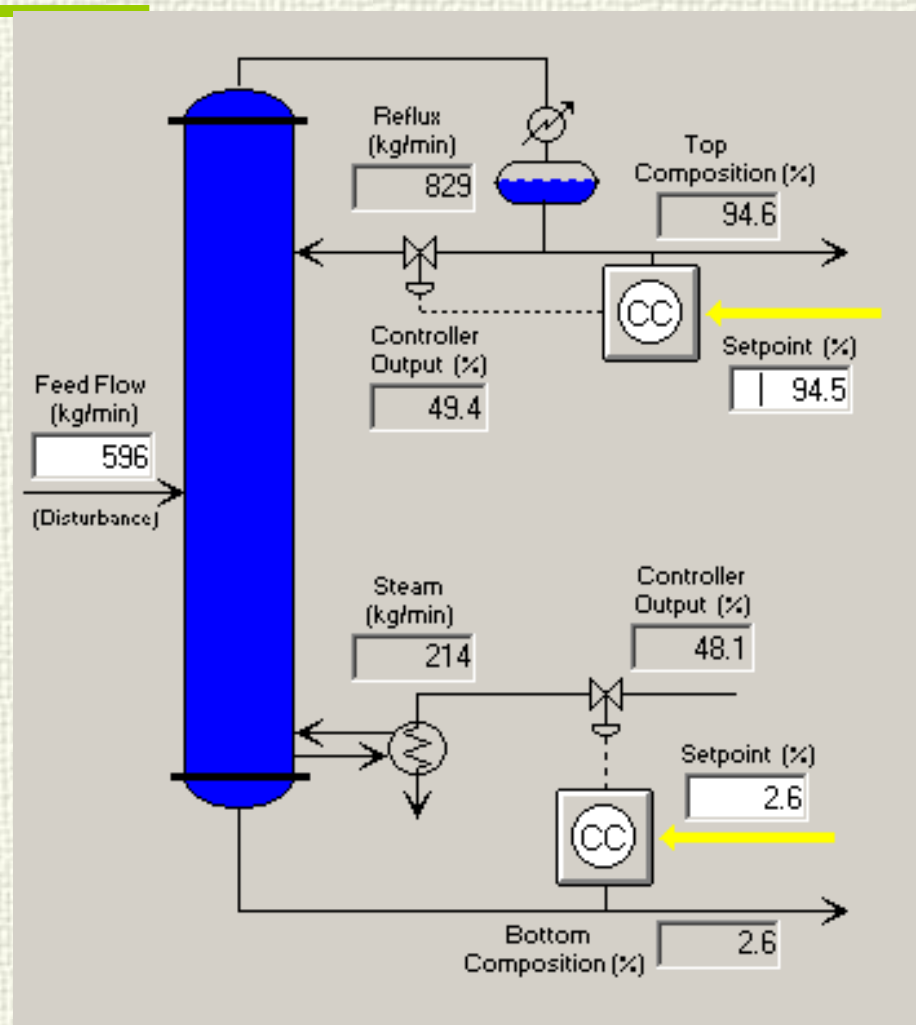
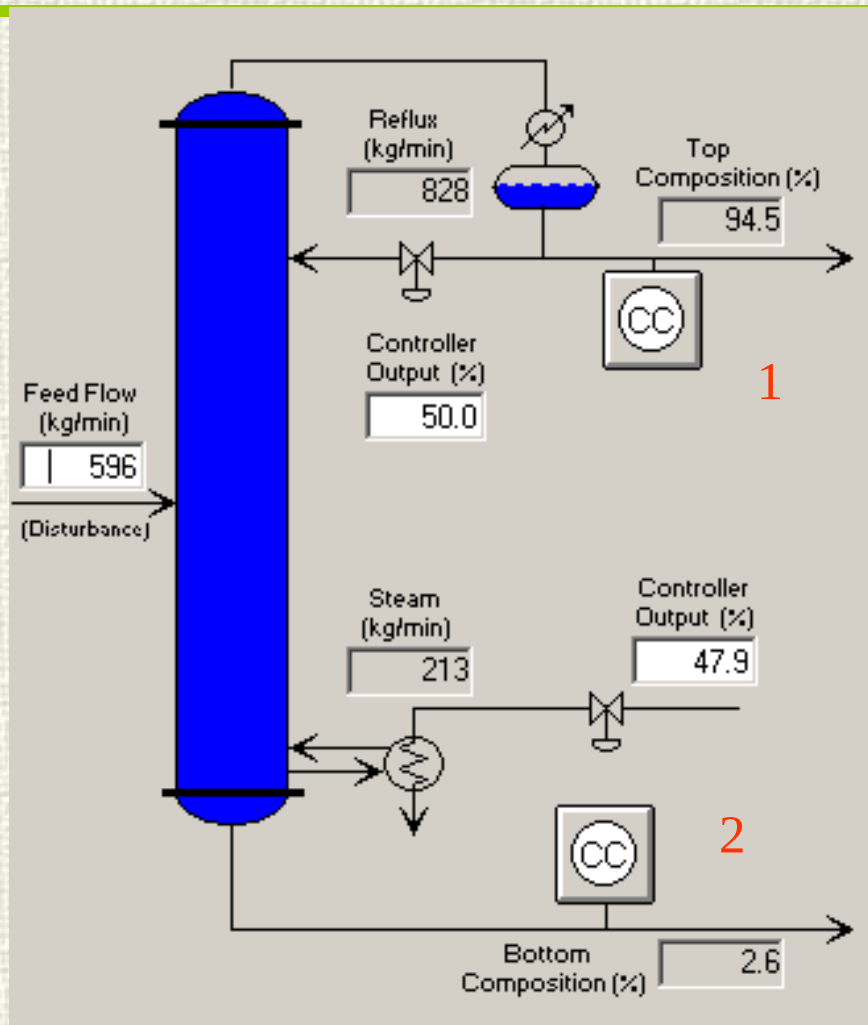
RGAs

El unico emparejamiento SISO admisible resulta ser:

y_1 ---- u_1 y_2 ---- u_2 y_3 ---- u_3

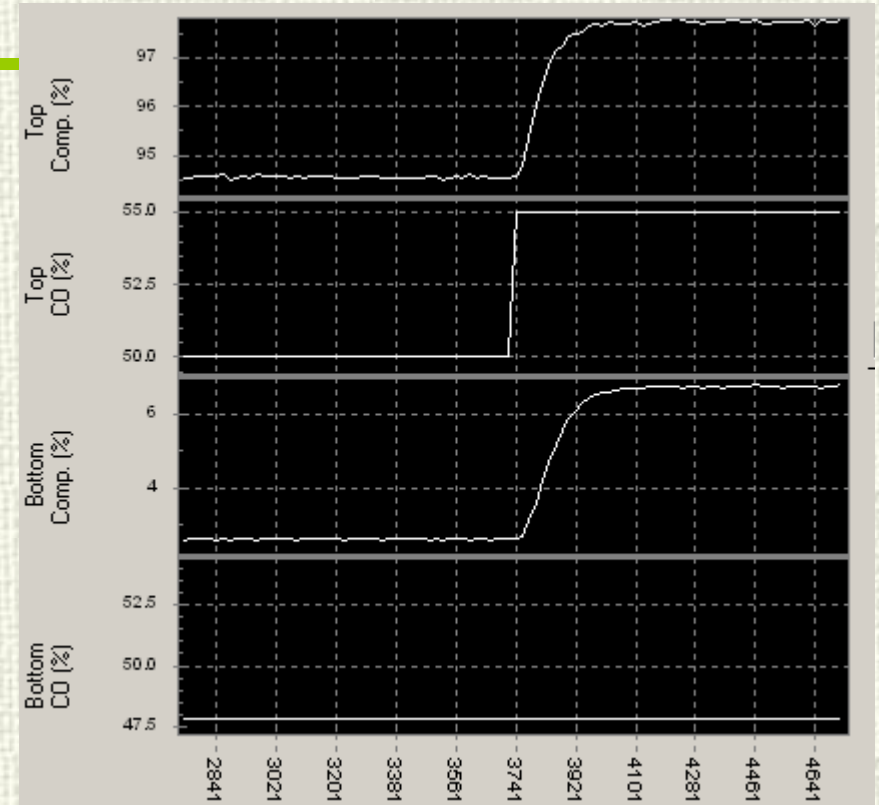
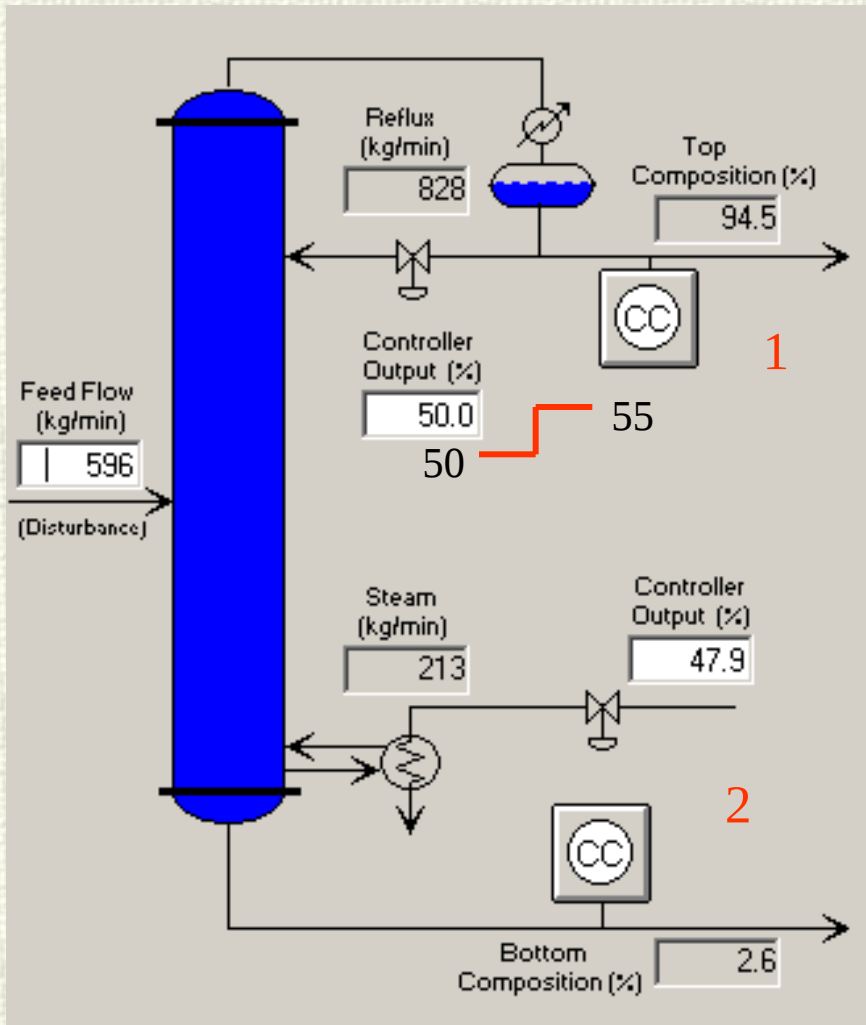
con una interacción mayor en el tercer lazo

Columna de destilación





Experimento en lazo abierto 1

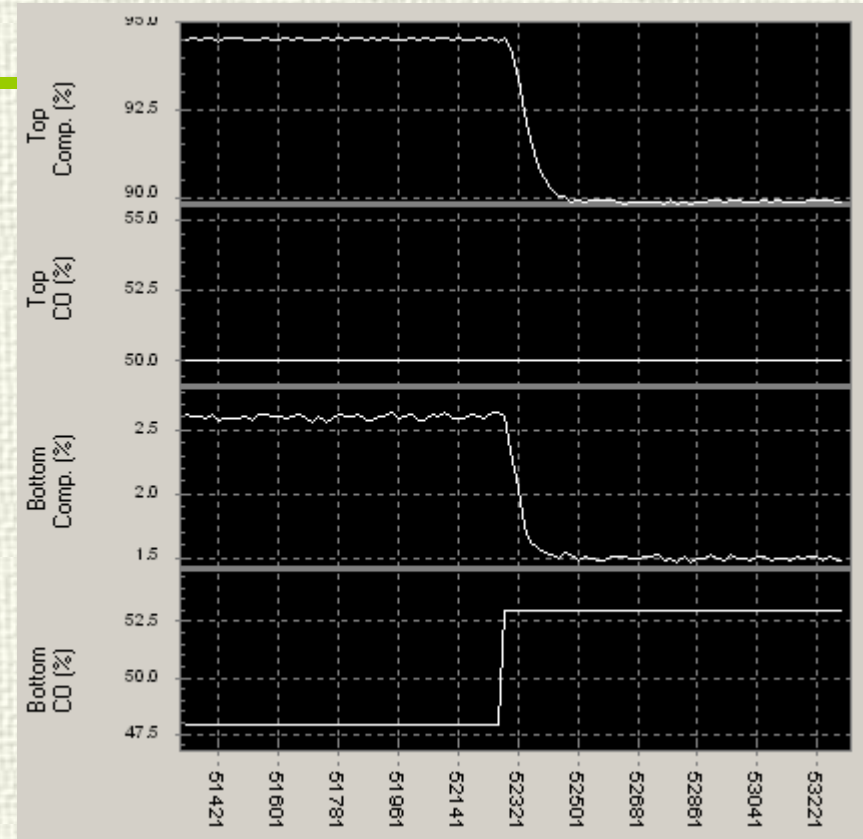
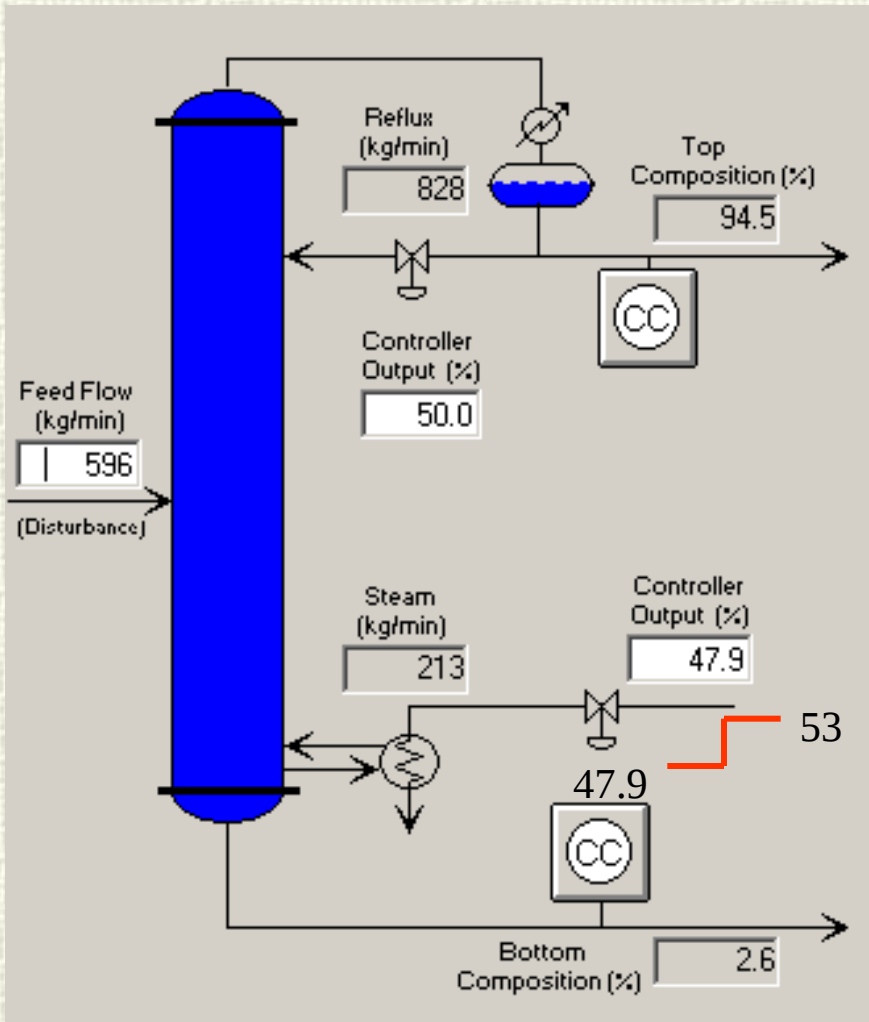


$$G_{11} = \frac{K_{11}e^{-d_{11}s}}{\tau_{11}s+1} = \frac{0.648e^{-21.7s}}{60s+1}$$

$$G_{21} = \frac{K_{21}e^{-d_{21}s}}{\tau_{21}s+1} = \frac{0.815e^{-34.4s}}{84.7s+1}$$



Experimento en lazo abierto 2



$$G_{12} = \frac{K_{12}e^{-d_{12}s}}{\tau_{12}s + 1} = \frac{-0.894e^{-21.6s}}{54.3s + 1}$$

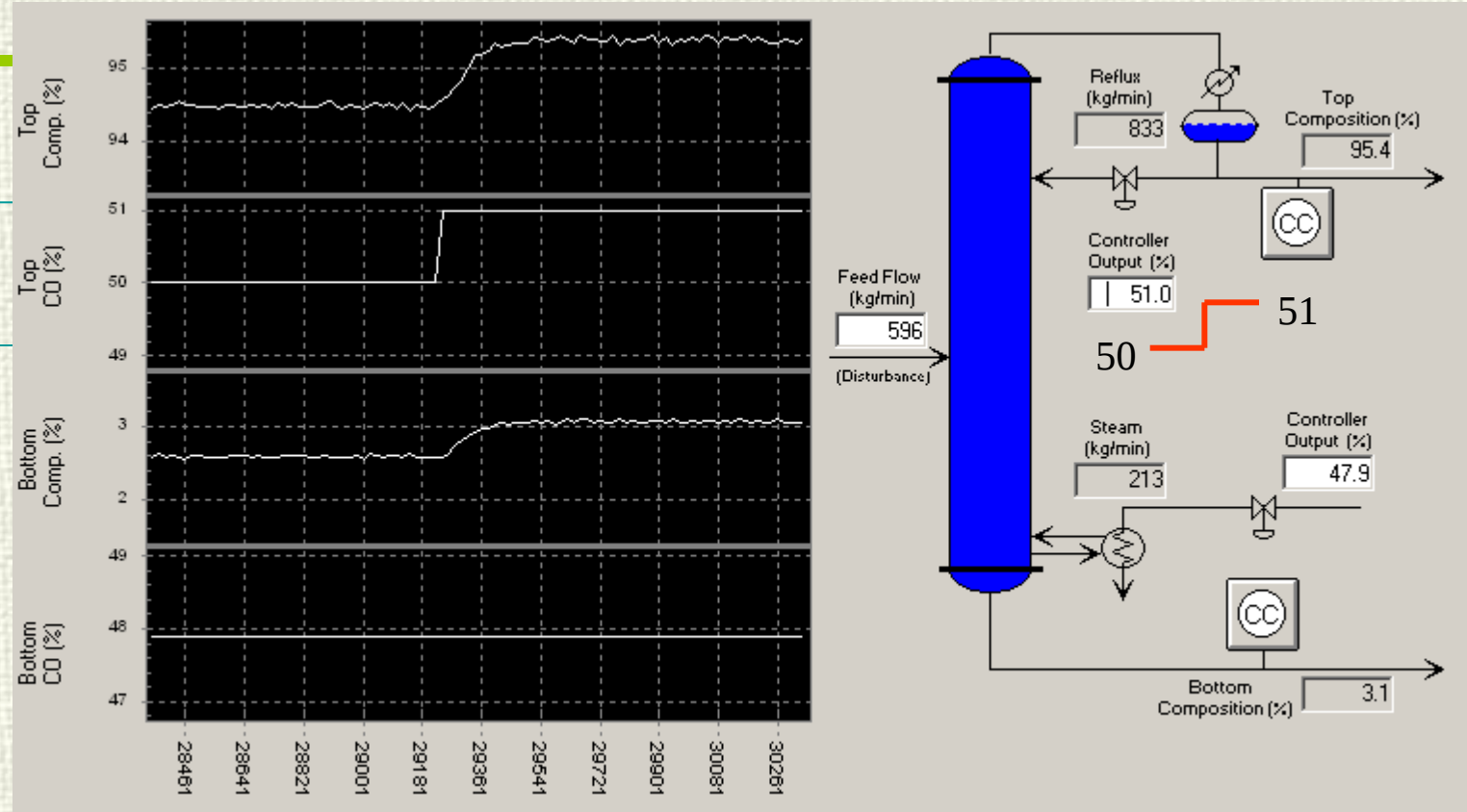
$$G_{22} = \frac{K_{22}e^{-d_{22}s}}{\tau_{22}s + 1} = \frac{-0.236e^{-6.61s}}{41.9s + 1}$$



Cuidado con los experimentos!



Cambio del
2 %

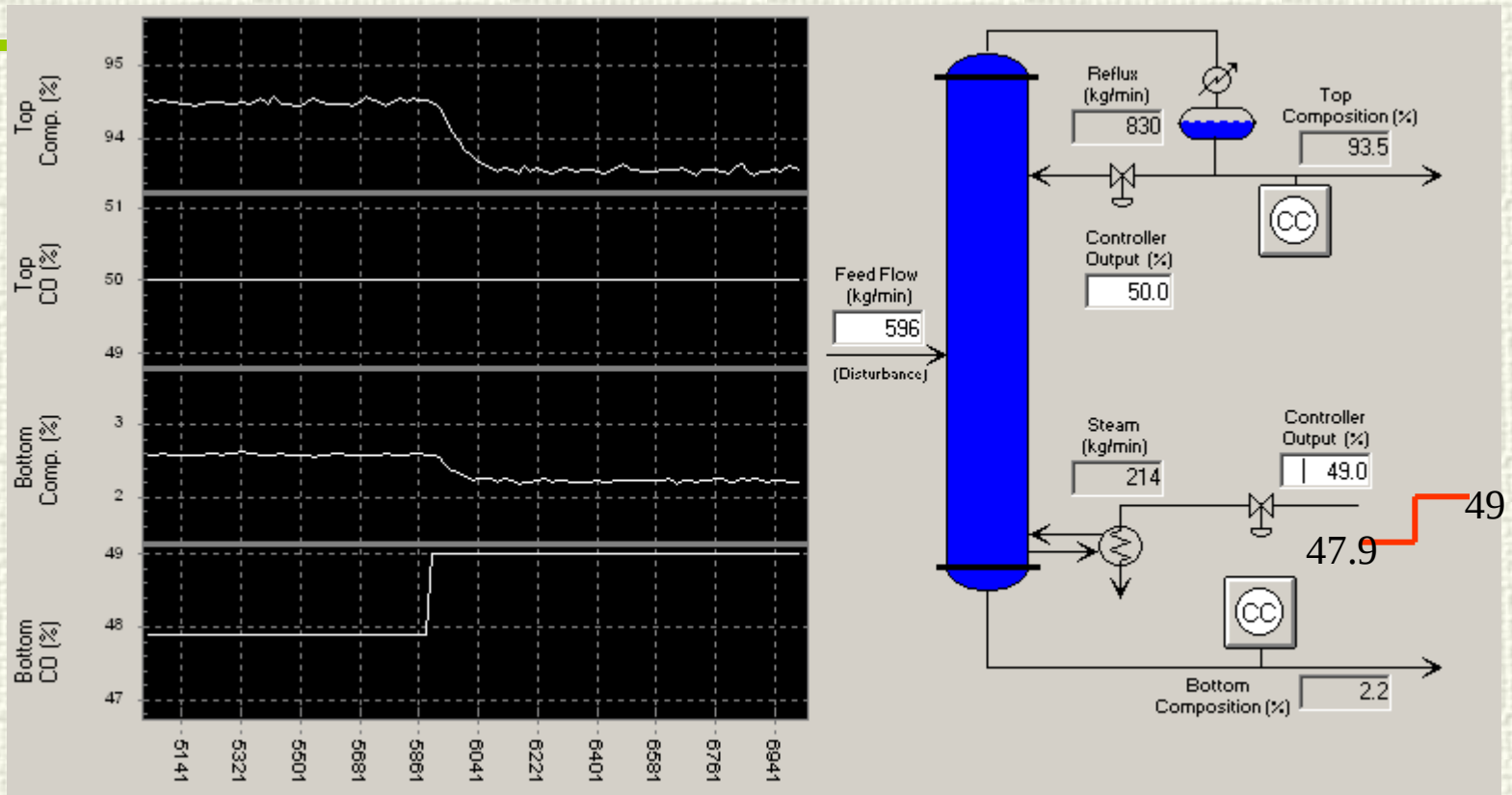


En sistemas
no –lineales,
cambios
grandes
pueden dar
resultados no
correctos

$$G_{11} = \frac{K_{11}e^{-d_{11}s}}{\tau_{11}s + 1} = \frac{0.99e^{-22.7s}}{72.8s + 1}$$

$$G_{21} = \frac{K_{21}e^{-d_{21}s}}{\tau_{21}s + 1} = \frac{0.38e^{-30.9s}}{66.65s + 1}$$

Planificar bien el experimento



$$G_{12} = \frac{K_{12}e^{-d_{12}s}}{\tau_{12}s + 1} = \frac{-0.82e^{-22.36s}}{66.67s + 1}$$

$$G_{22} = \frac{K_{22}e^{-d_{22}s}}{\tau_{22}s + 1} = \frac{-0.35e^{-4.5s}}{57.02s + 1}$$



~~$$K = \begin{bmatrix} 0.648 & -0.894 \\ 0.815 & -0.236 \end{bmatrix}$$~~

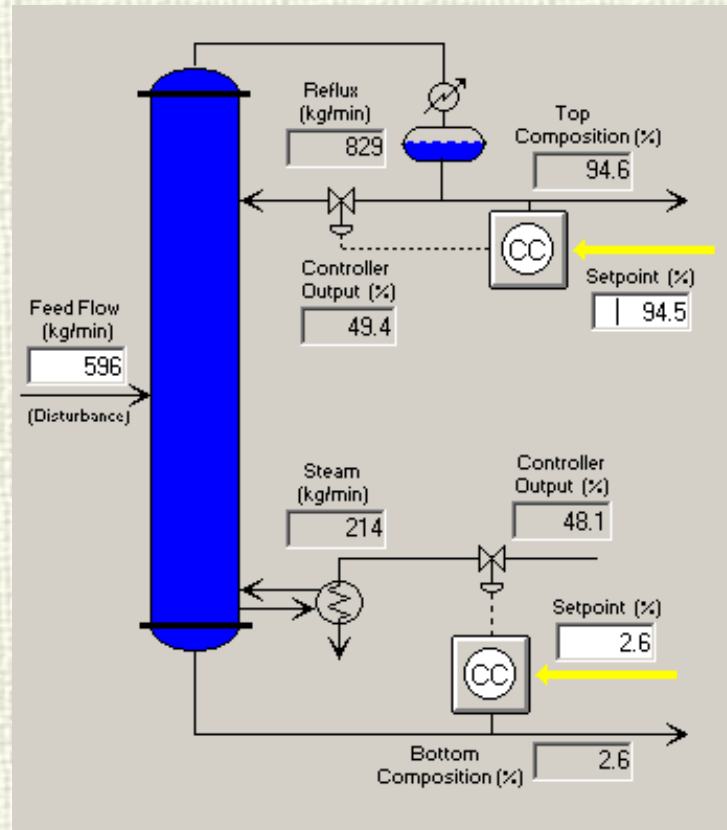
RGAs

~~$$RGA = \begin{bmatrix} -0.265 & 1.265 \\ 1.265 & -0.265 \end{bmatrix}$$~~

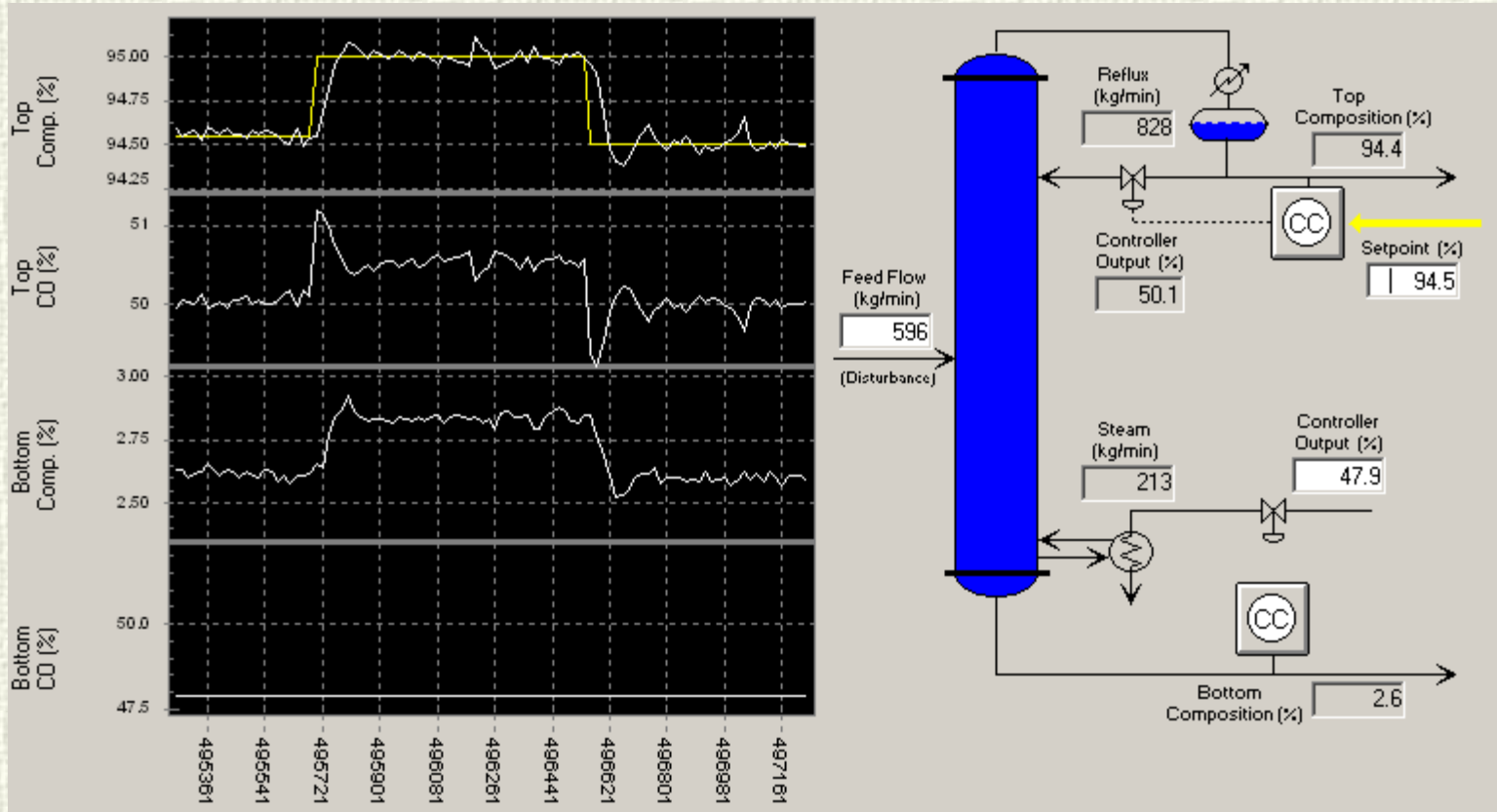
$$K = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix}$$

$$RGA = \begin{bmatrix} 9.1 & -8.1 \\ -8.1 & 9.1 \end{bmatrix}$$

Wrong gain matrix can indicate wrong pairing of variables



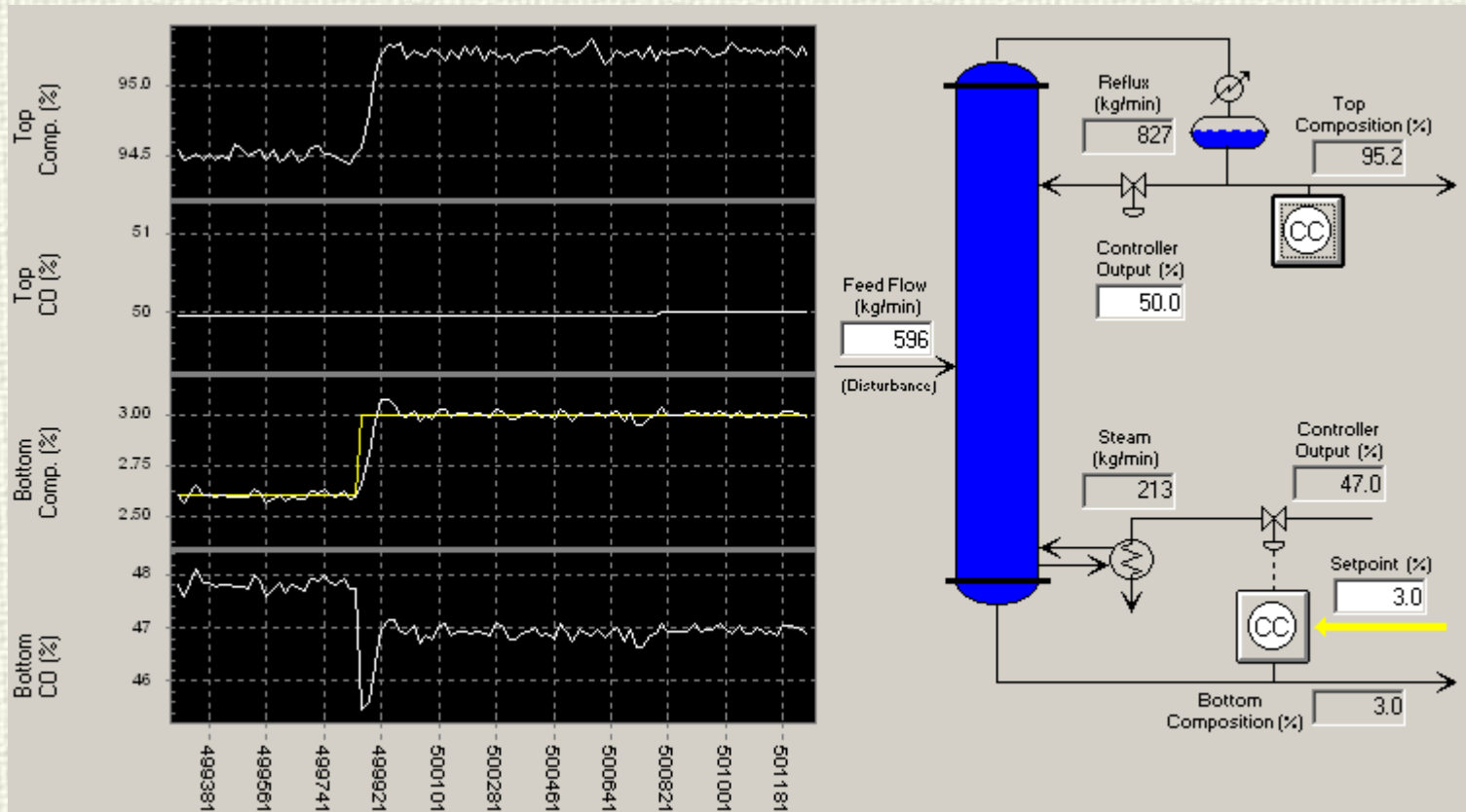
Sintonía: Control de la composición de cabeza con el lazo de impurezas de fondo en manual



IMC tuning $\lambda=50$ min. $K_p = 2.19$, $T_i = 70.85$ min.

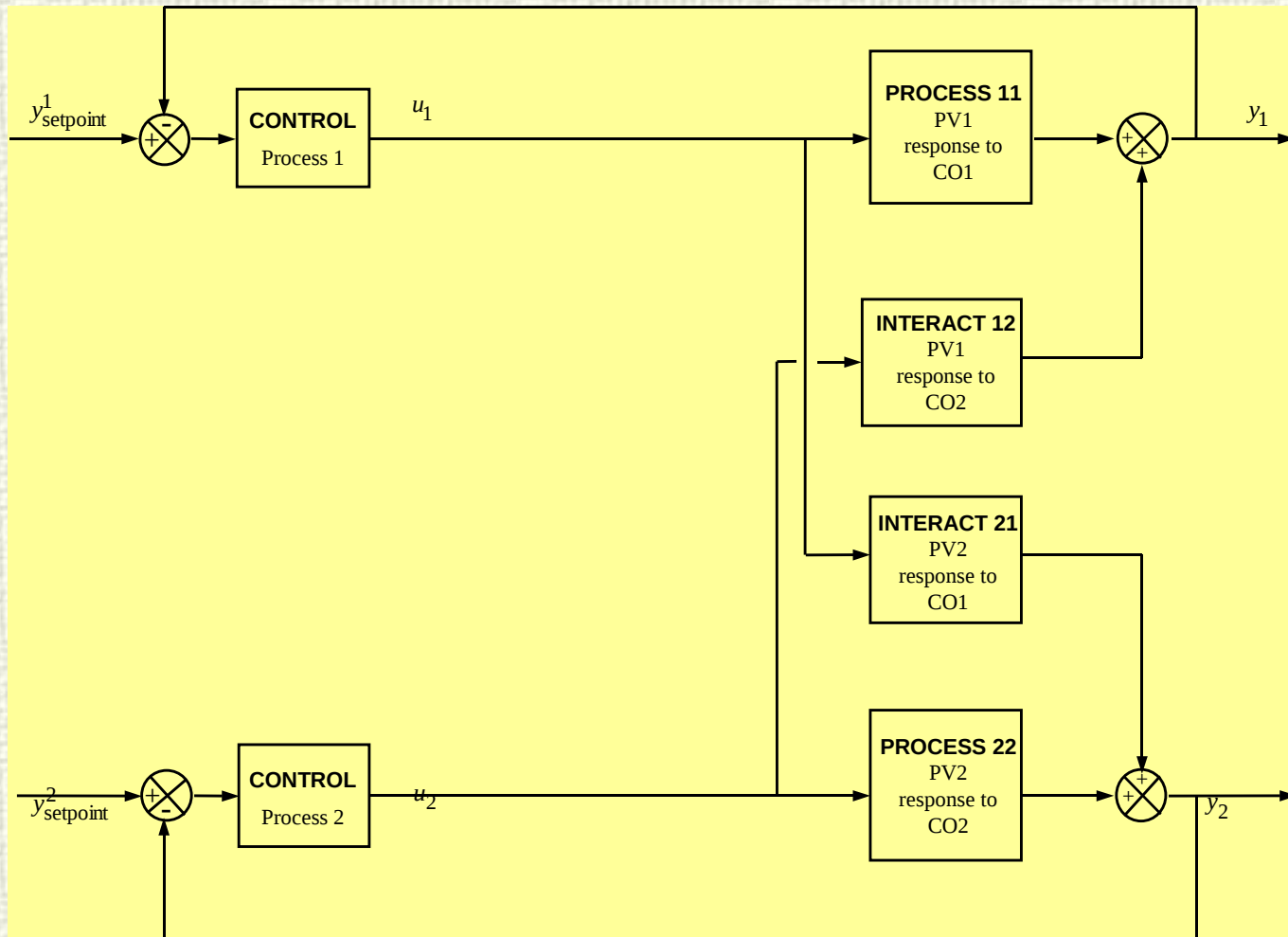


Sintonía: Control de las impurezas del fondo con el lazo de composición de cabeza en manual



IMC tuning $\lambda=35$ min. $K_p = -5.47$, $T_i = 45.2$ min.

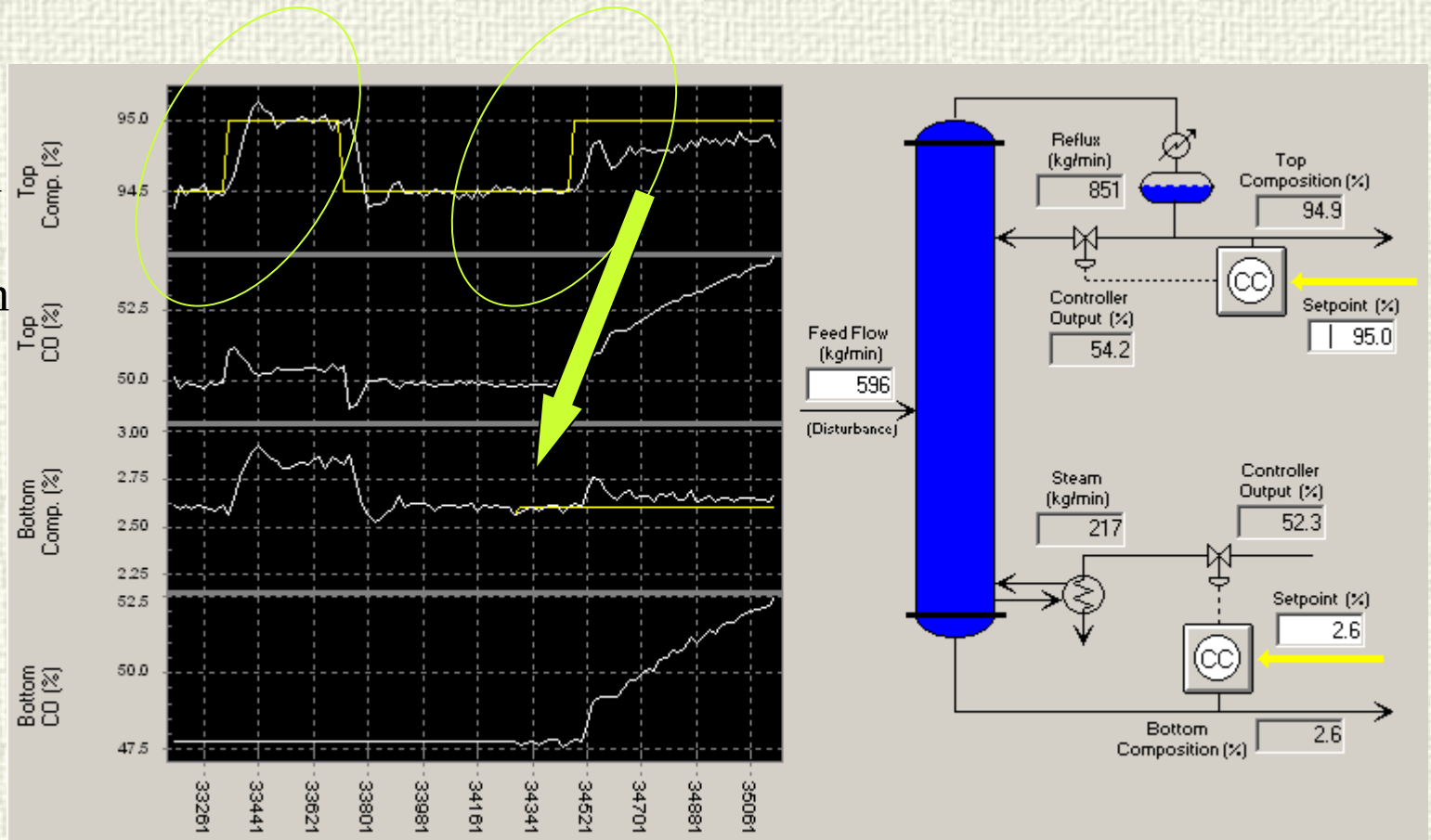
Interacción entre lazos de control





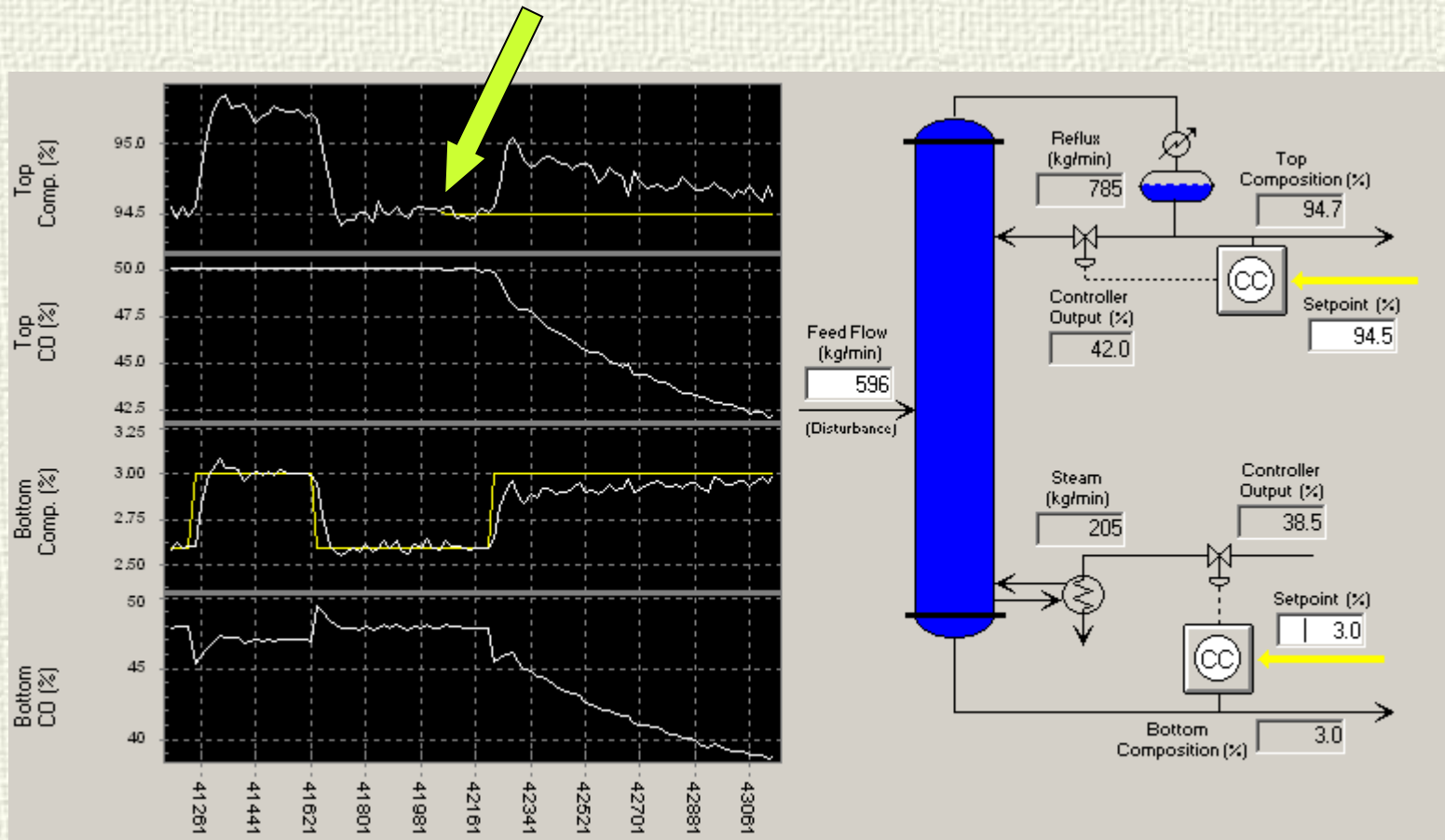
Cambio del lazo de impurezas de fondo de manual a automatico

La dinámica del lazo de composición de cabeza cambia mucho, al igual que la del fondo

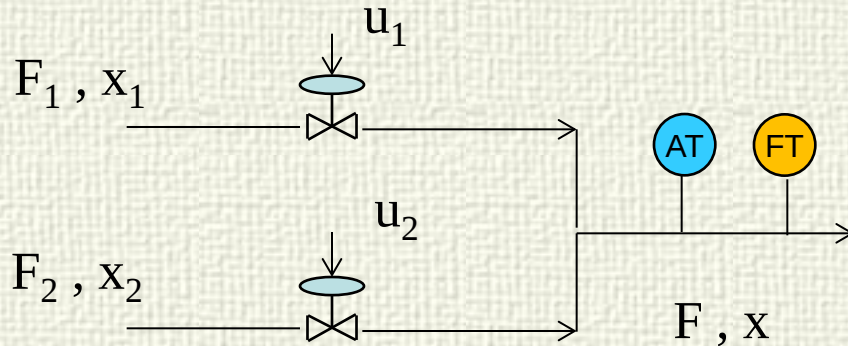


Cambio del lazo de composición de cabeza de manual a automático

La dinámica del lazo de impurezas de fondo cambia mucho, al igual que la de la cabeza



Proceso de mezcla



Balance caudal:

$$F = F_1 + F_2$$

Balance de Composición

$$F x = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

$$x = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} \quad \Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$$

$$\Delta x = \frac{(F_1 + F_2)x_1 - (F_1 x_1 + F_2 x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \Delta F_1 + \frac{(F_1 + F_2)x_2 - (F_1 x_1 + F_2 x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \Delta F_2$$

$$\Delta x = \left. \frac{F_2(x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \Delta F_1 - \left. \frac{F_1(x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \Delta F_2$$

Linearización en un
cierto punto estacionario



Proceso de mezcla

Matriz de ganancias estacionarias

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{F_2 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} & - \left. \frac{F_1 (x_1 - x_2)}{(F_1 + F_2)^2} \right|_{ss} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \end{bmatrix}$$

$$F = F_1 + F_2 \quad Fx = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Eliminando F_2 entre ambas ecuaciones

$$F = F_1 \cdot \frac{x_1 - x_2}{x - x_2} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{F, F_1} = \frac{1}{\left(\frac{x_1 - x_2}{x - x_2} \right)} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$Fx - Fx_2 = F_1 x_1 - F_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad Fx = F_1 x_1 - F_1 x_2 + Fx_2 = F_1 x_1 - F_1 x_2 + F_1 x_2 + F_2 x_2 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Proceso de mezcla(Cont.)

La matriz de ganancias relativas **RGA** es:

	F_1	F_2
F	$\frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$	$\frac{X_1 - X}{X_1 - X_2}$
X	$\frac{X_1 - X}{X_1 - X_2}$	$\frac{X - X_2}{X_1 - X_2}$

¿Cuál es el mejor emparejamiento entre variables manipuladas y controladas? ¿De qué dependerá la respuesta?

Proceso de mezcla

	F_1	F_2
F	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$
x	$\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$	$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

Para $x = 0.32$

	F_1	F_2
F	0.2	0.8
x	0.8	0.2

Para $x = 0.602$

	F_1	F_2
F	0.67	0.33
x	0.33	0.67

Suponiendo $x_1 = 0.8$ $x_2 = 0.2$



$RGA(j\omega)$

$$RGA(G(j\omega))$$

La RGA se formuló originalmente sobre la matriz de ganancias estacionarias, frecuencia 0, pero puede evaluarse y dar información útil a cualquier otra frecuencia

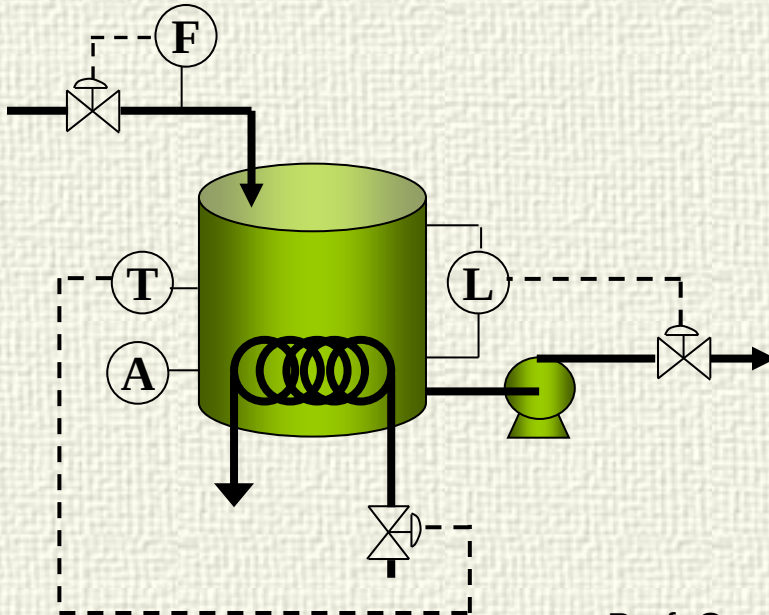


Dos enfoques alternativos

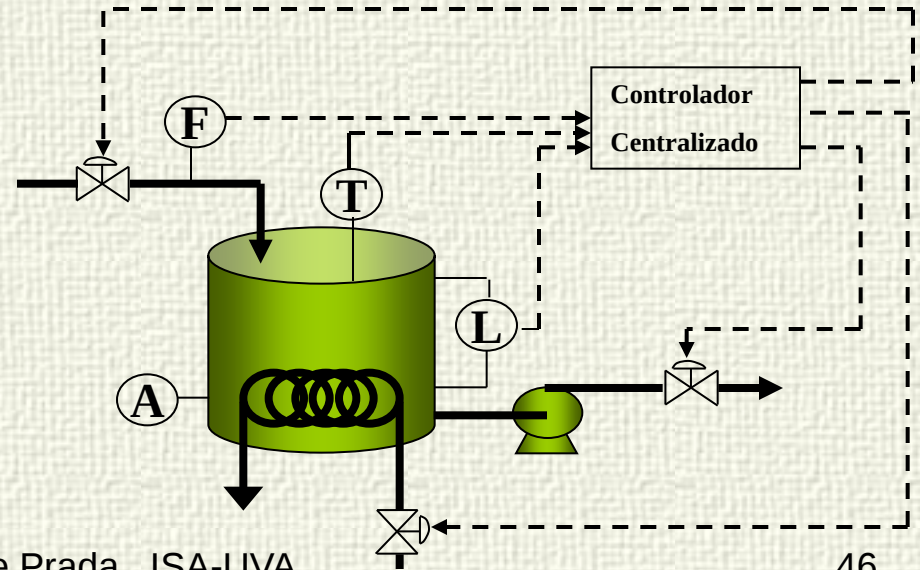


MULTILOOP vs Centralizado

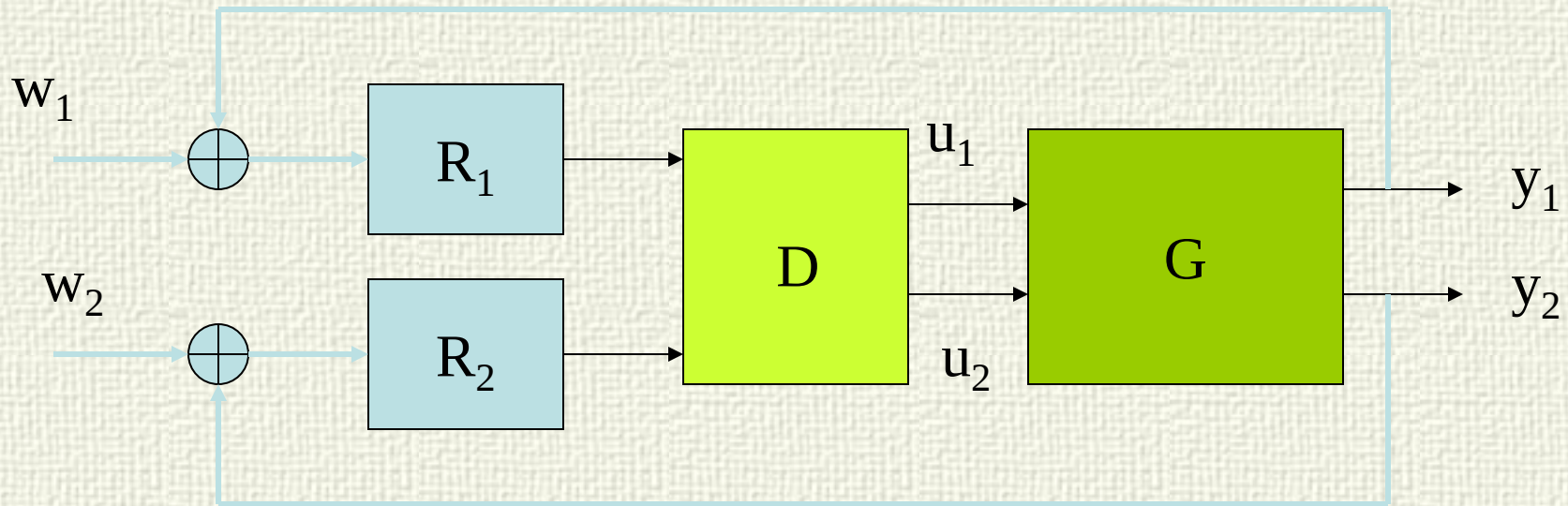
Multiloop: varios controladores
PID independientes



Centralizado

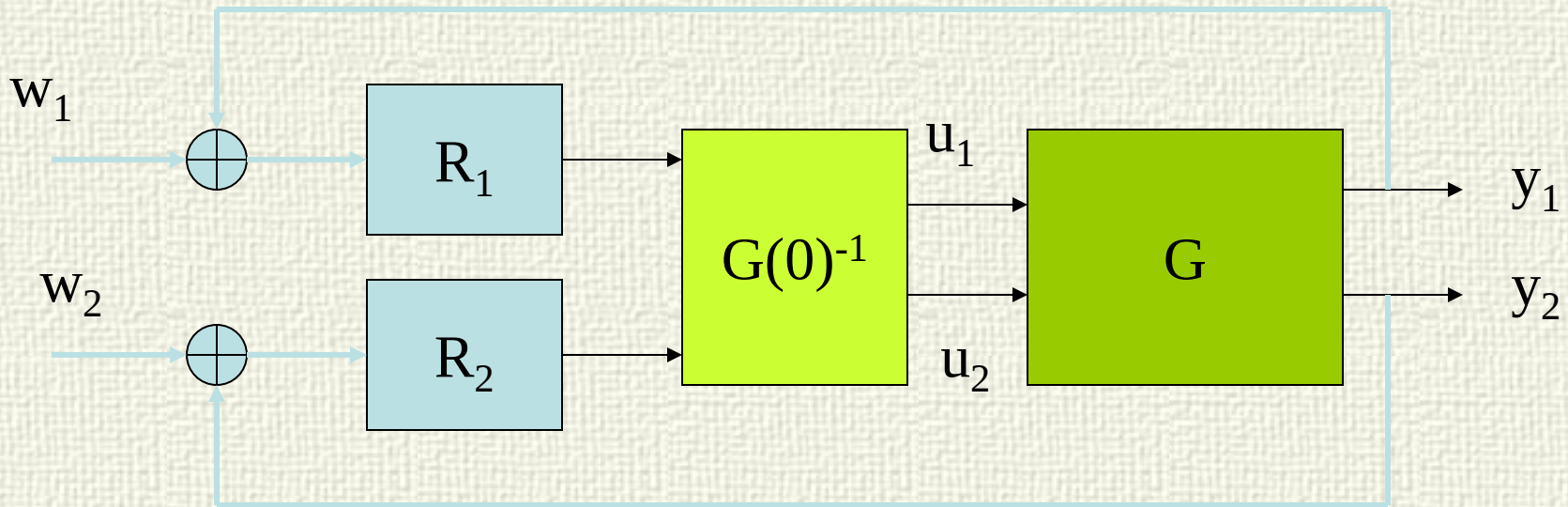


Desacoplo



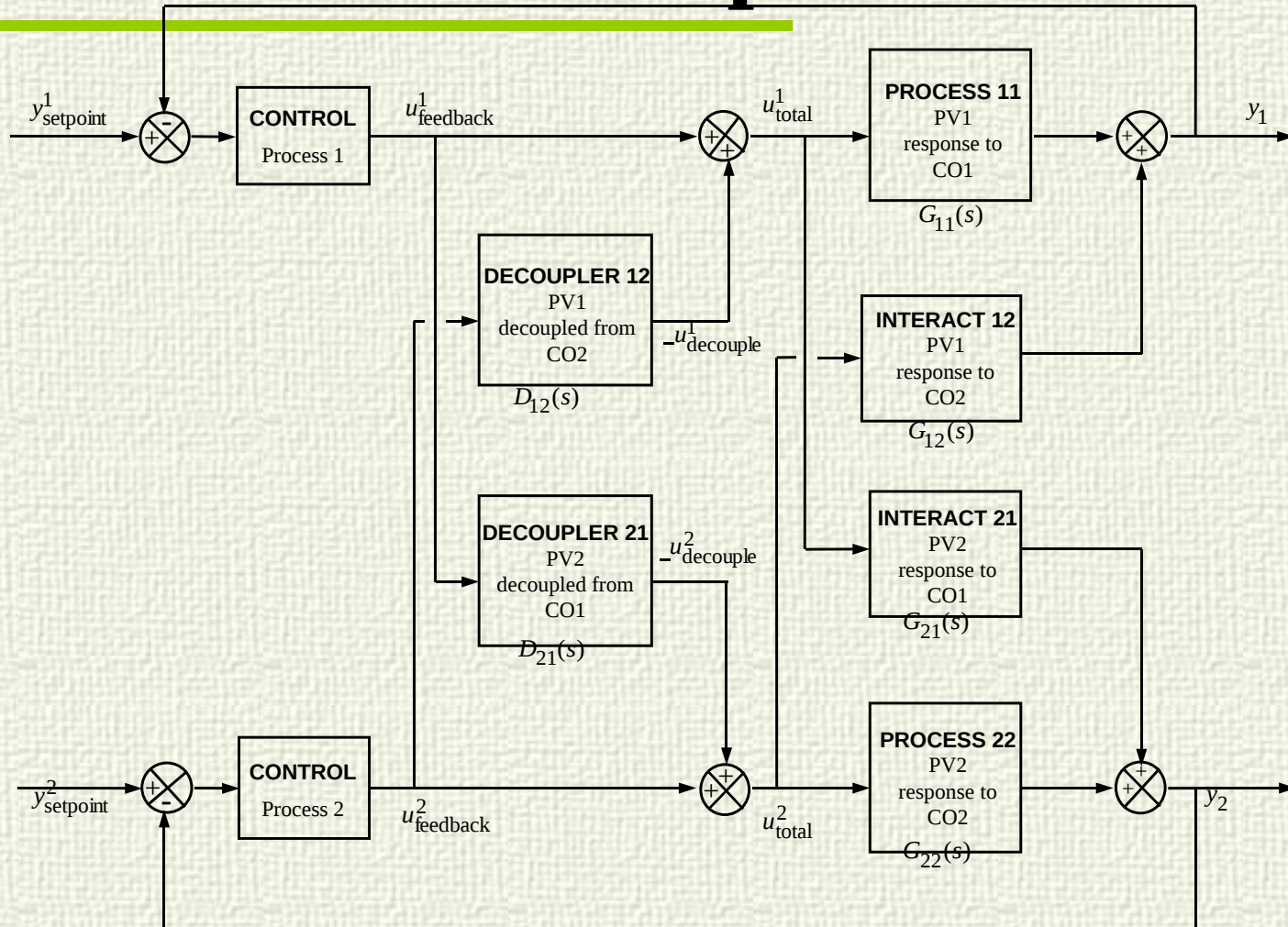
Encontrar la matriz D , tal que GD se comporte como una matriz diagonal o casi diagonal

Desacoplo en estado estacionario



Si $D = G(0)^{-1}$, entonces $G(s) G(0)^{-1}$ es diagonal en estado estacionario de modo que, en reposo, no hay interacción. Fácil de implementar y calcular, $G(0)^{-1} =$ inversa de la matriz de ganancias estacionarias.

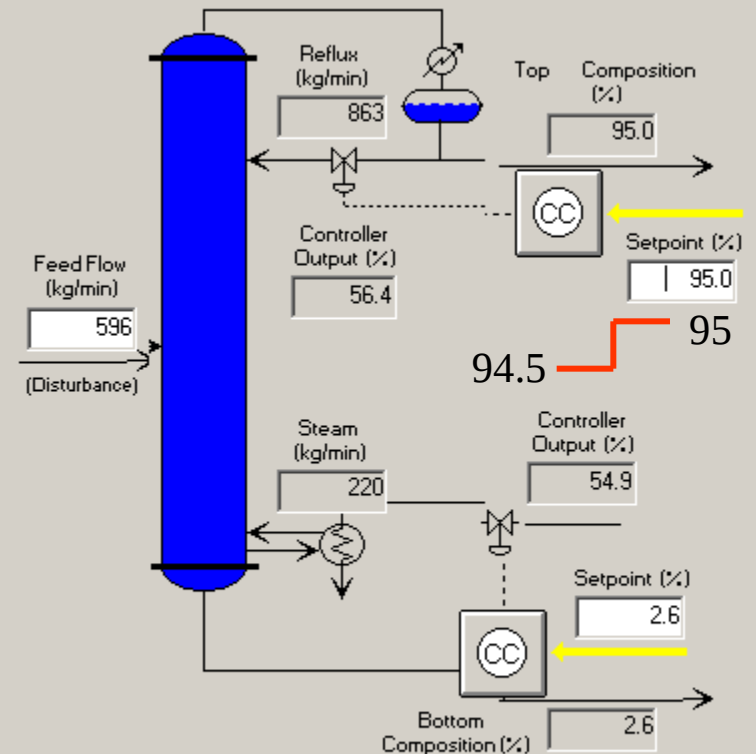
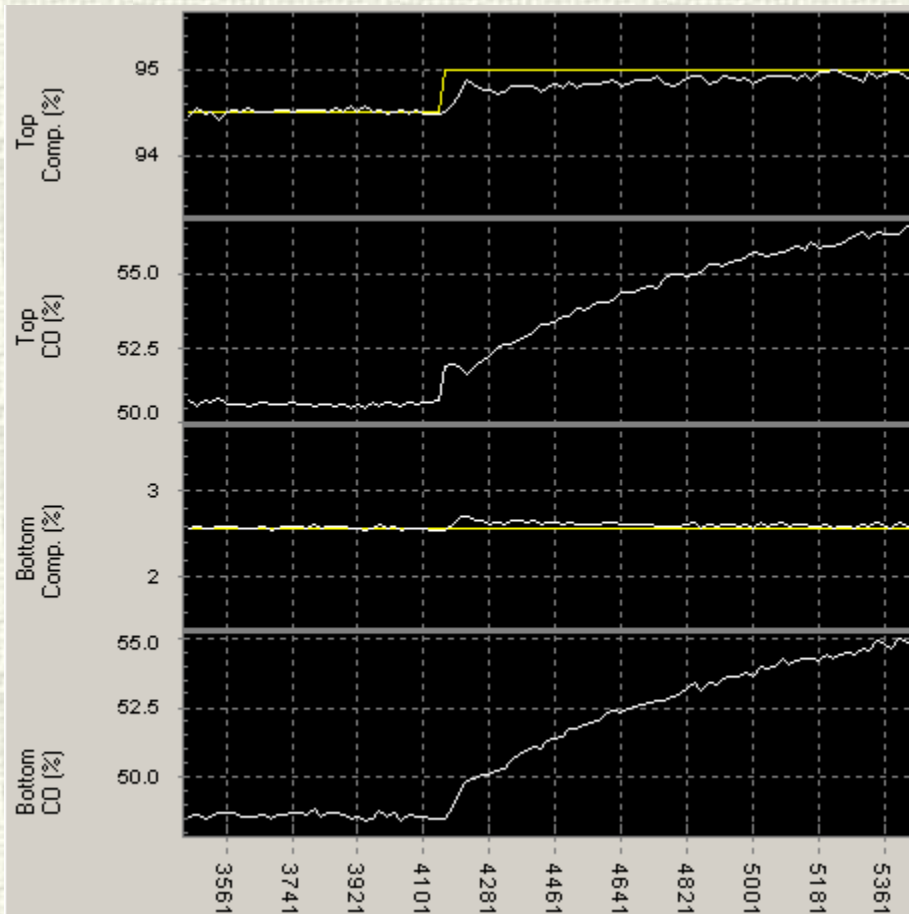
Estructura de control con desacoplo



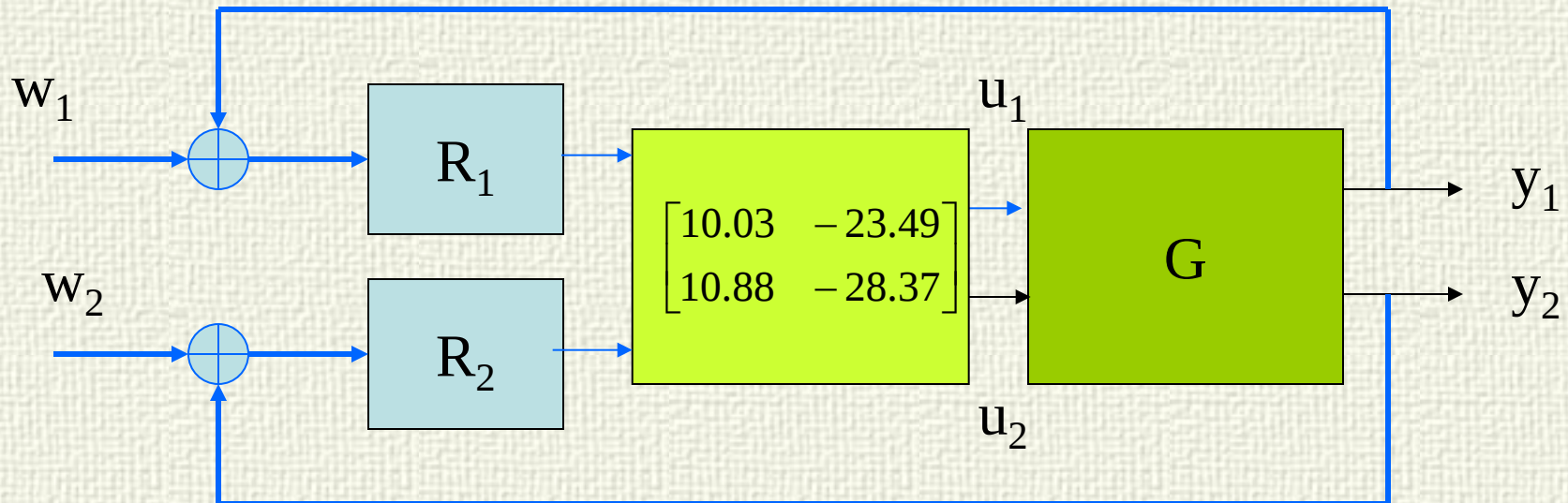


2x2 Multivariable Decoupling

- ✓ Requiere 4 modelos dinámicos
 - Process 11 (como CO_1 impacta en PV_1)
 - Interact 12 (como CO_2 impacta en PV_1)
 - Interact 21 (como CO_1 impacta en PV_2)
 - Process 22 (como CO_2 impacta en PV_2)
- ✓ Estos modelos deben construirse a partir de datos de planta, validados e incluidos en el diseño del controlador.
- ✓ El desacople de lazos no es una técnica muy empleada industrialmente porque su empleo requiere un esfuerzo significativo de modelado, sintonía y mantenimiento.

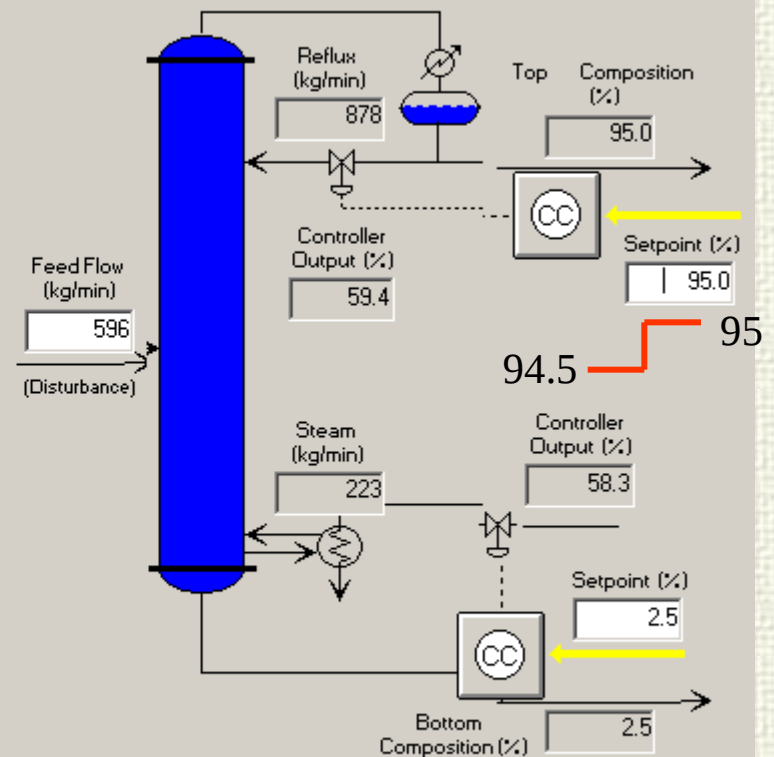
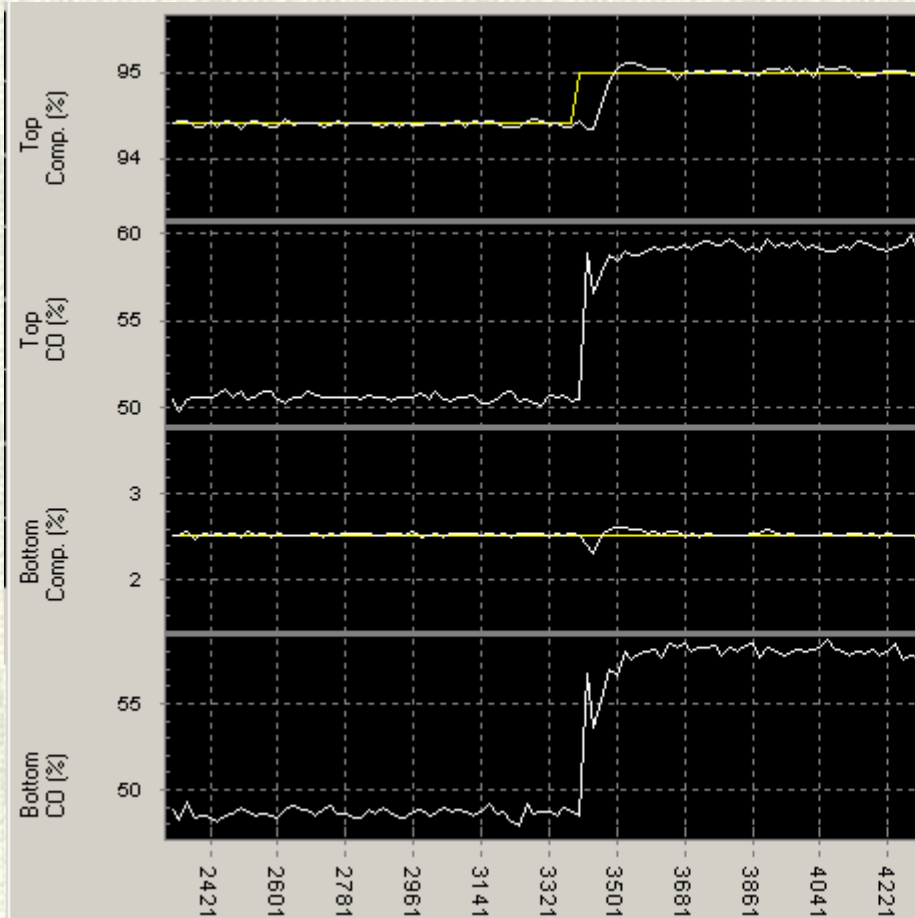


SS Decoupling

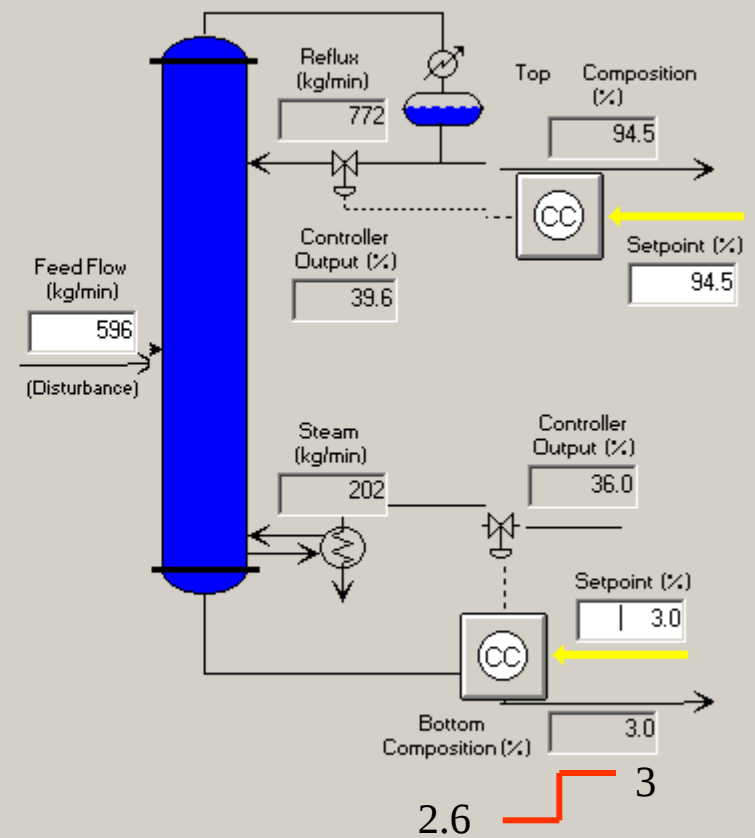
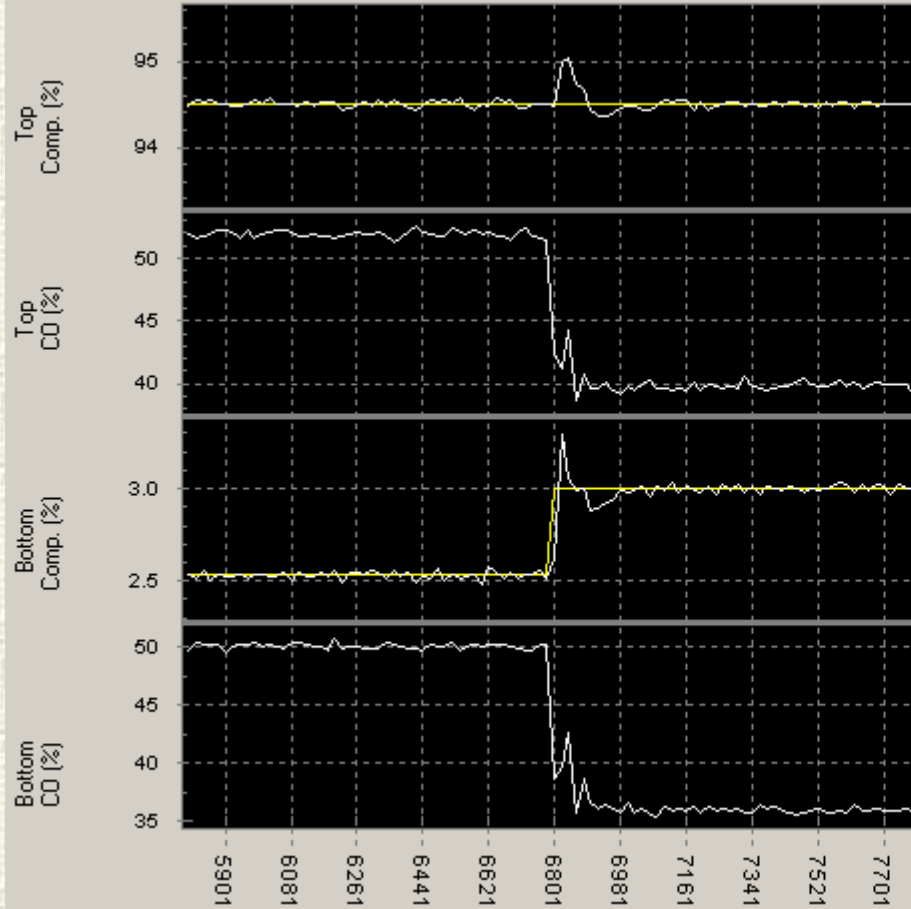


$$G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.99 & -0.82 \\ 0.38 & -0.35 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10.03 & -23.49 \\ 10.88 & -28.37 \end{bmatrix}$$

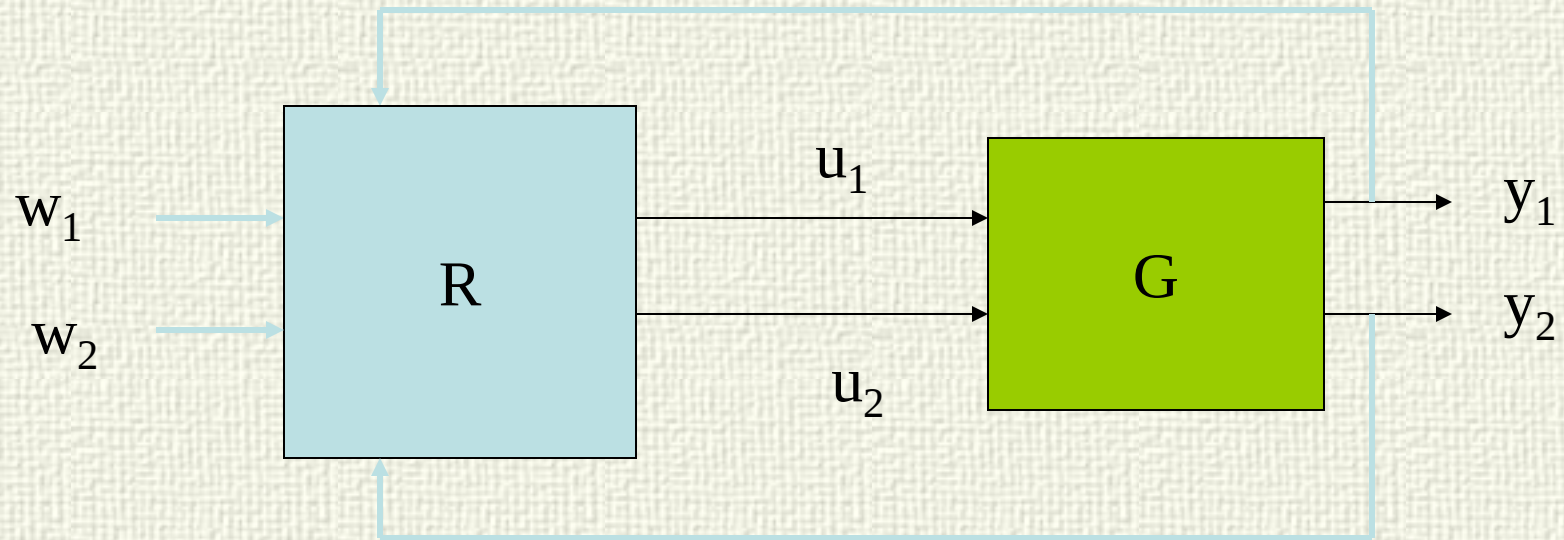
Con matriz de desacoplo en ss



Con matriz de desacoplo en ss



Control multivariable



El controlador recibe señales de todas las salidas y simultáneamente calcula todas las señales de control teniendo en cuenta la interacción

Control Predictivo multivariable

